Pack ISI
Introduction aux signaux et aux systèmes

I. Représentation temporelle et fréquentielle des signaux

1. Généralités sur les signaux

- **Définition**
- **Chaîne de traitement de l'information**
- **Classification des signaux**

2. Représentation temporelle d'un signal

- **Définitions**
- **Signaux particuliers**
- **Energie et puissance d'un signal**

3. Représentation fréquentielle d'un signal

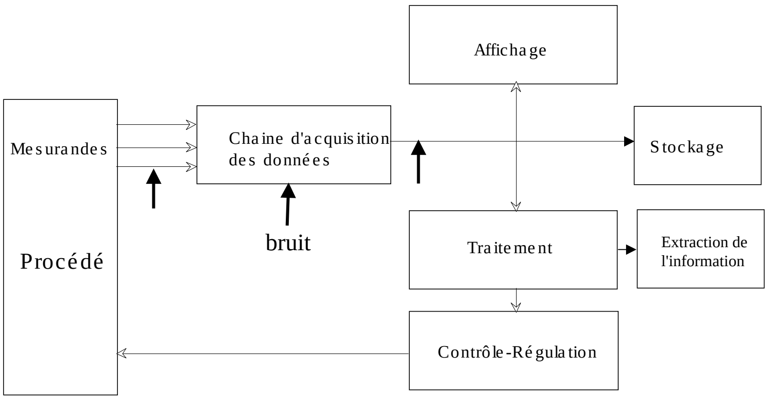
- **Signaux périodiques : série de Fourier**
- **Signaux apériodiques : Transformée de Fourier**

4. Signaux aléatoires

1. Généralités sur les signaux

Définition. Un signal est une grandeur de nature physique quelconque (acoustique, optique, électrique…) généralement variable dans le temps.

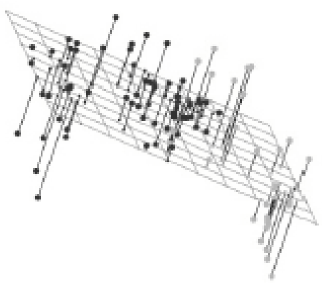
Chaîne de traitement de l'information



1. Généralités sur les signaux

Exemple de traitement des données - Analyse en composantes principales (ACP)

Chaque visage est représenté par un vecteur de grande dimension $x \in \mathbf{R}^{361}$



$$\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{361}$$

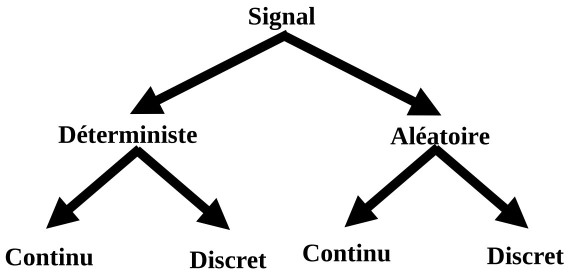
$$\mathrm{z} = \mathrm{U}^\top \mathrm{x}$$

$$\mathrm{z} \in \mathbb{R}^{10}$$

Comment choisir U ?

1. Généralités sur les signaux

Classification des signaux



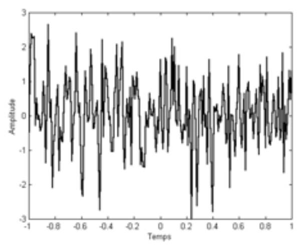
1. Généralités sur les signaux

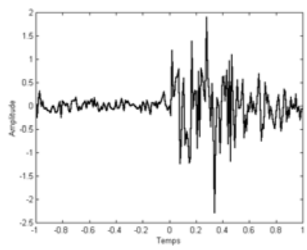
Classification des signaux

Signaux déterministes. Un signal déterministe, ou certain, est un signal dont l'évolution est parfaitement prévisible grâce à une description mathématique ou graphique.

Signaux aléatoires. Un signal aléatoire ou stochastique est un signal dont l'évolution dépend du hasard. Dans le meilleur des cas, on ne connaît que des propriétés statistiques

Stationnaire et non stationnaire. La stationnarité suppose une indépendance des caractéristiques statistiques par rapport à l'origine des temps.

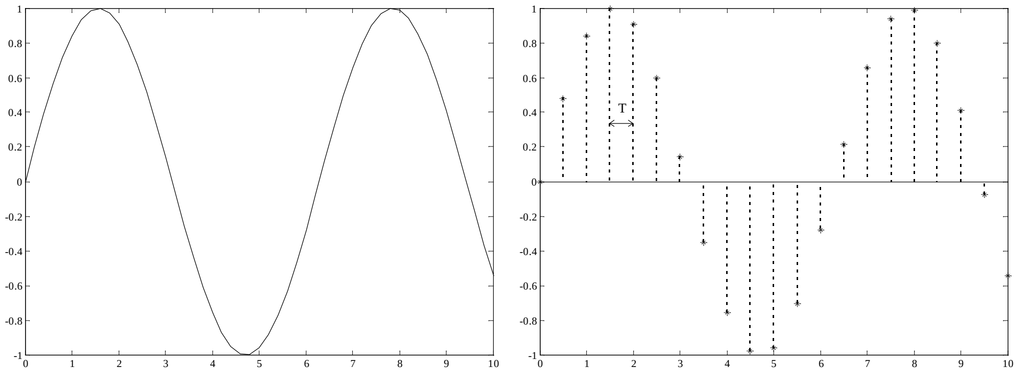




1. Généralités sur les signaux

Classification des signaux

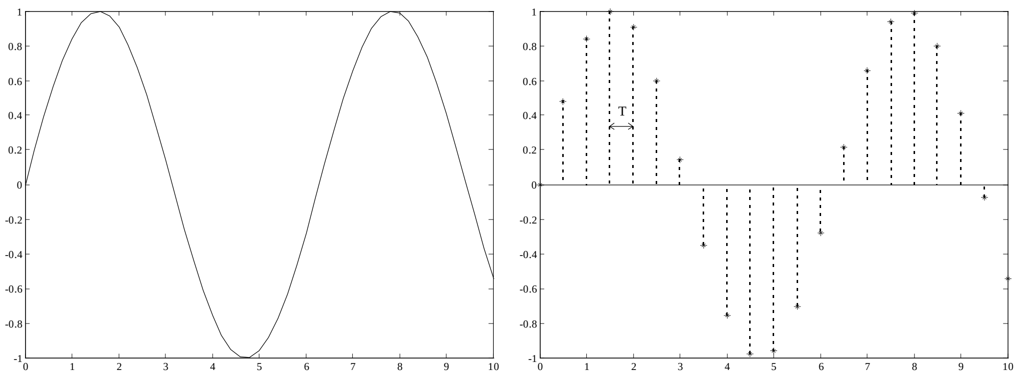
Signaux continus. Un signal continu $x(t)$ est défini sur un ensemble continu d'instants.



Signaux discrets. Un signal discret est défini sur une suite, finie ou non, d'instants t_n. En général $t_n = nT$, est un multiple entier d 'un pas de temps élémentaire T.

2. Représentation temporelle d'un signal

C'est un modèle mathématique ou graphique du signal, donnant son évolution au cours du temps.



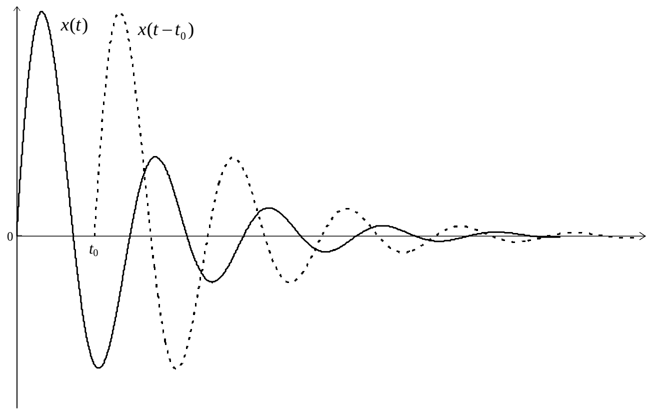
$$y(t) = \sin(t)$$

$$y(nT) = \sin(nT), \quad T = 0.5\,\mathrm{sec}$$

2. Représentation temporelle d'un signal
Signaux particuliers

Signaux causaux. Un signal est dit causal si : $\forall t < 0, \quad x(t) = 0$

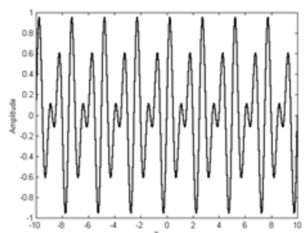
Signaux retardés. Le retardé d'un instant t_0 d'un signal $x(t)$ s 'écrit : $x(t - t_0)$



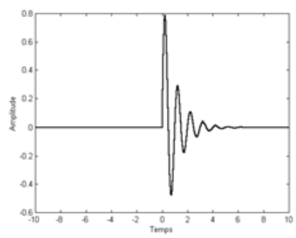
2. Représentation temporelle d'un signal
Signaux particuliers

Signaux périodiques. C'est un signal qui se répète identique à lui même à chaque période T du signal :

$$\exists T \text{ tq } \forall t, \quad x(t) = x(t+T)$$



Signaux transitoires . C'est un signal nul pour : $t \to +\infty$



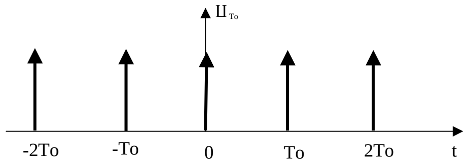
2. Représentation temporelle d'un signal

Signaux particuliers

Echelon unité, Impulsion rectangulaire et Impulsion de Dirac

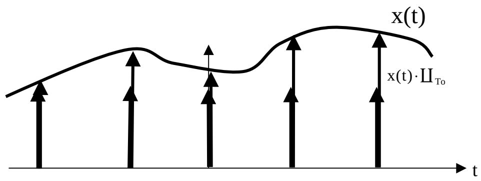
Peigne de Dirac. C'est une somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T_o

$$Ш_{T_o} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_o)$$



Propriété

$$x(t) \cdot Ш_{To} = \sum_k x(kTo) \cdot \delta(t - kTo)$$



2. Représentation temporelle d'un signal

Energie et puissance d'un signal

Toute transmission d'information est liée à un transfert d'énergie

Soit un signal x(t) défini sur [-∞, +∞], et To un intervalle de temps.

Énergie de $x(t)$: $E = \lim\limits_{To \to \infty} \int_{-\frac{To}{2}}^{\frac{To}{2}} |x(t)|^2 \, dt$

Puissance moyenne de $x(t)$: $P = \lim\limits_{To \to \infty} \frac{1}{To} \int_{-\frac{To}{2}}^{\frac{To}{2}} |x(t)|^2 \, dt$

Cas des signaux périodiques de période T : $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$

Classification

- Signaux à énergie finie ⇨ puissance moyenne nulle (cas des signaux représentant une grandeur physique, à support borné).
- Signaux à énergie infinie (cas des signaux périodiques)

2. Représentation temporelle d’un signal

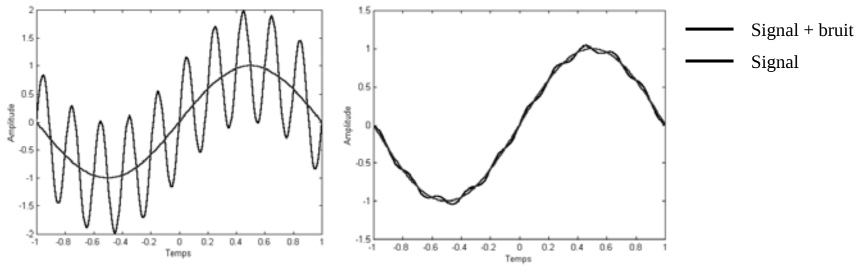
Notion de rapport signal sur bruit

L’objectif est de déterminer la qualité d'un signal aléatoire ou déterministe ⇨ introduction d'un rapport $R_{S/B}$ quantifiant l'effet du bruit.

$$R_{S/B} = \frac{P_s}{P_b} \qquad R_{S/B}(dB) = 10\log_{10}(R_{S/B})$$

Ps étant la puissance du signal et Pb celle du bruit.

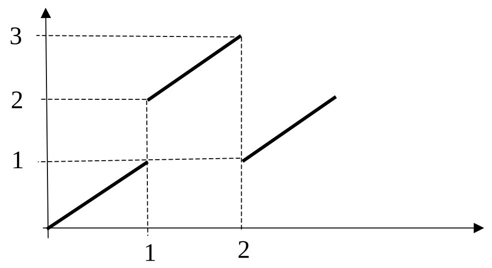
$R_{S/B}$=0 dB $R_{S/B}$=26 dB



2. Représentation temporelle d’un signal

Calculer : $\int_{-2}^{3} f(t)(2+\delta(t+1)-3\delta(t-1)+2\delta(t+3))dt$

Soit le signal :



1. Donner l’expression mathématique de ce signal

2. Calculer la dérivée du signal

2. Représentation temporelle d'un signal

Soit le signal $x(t)=E\cdot\mathrm{sgn}(u(t)+g(t))$, où E est une constante positive et $g(t)$ un signal périodique :

$$g(t)=\frac{2A}{T}t,\quad t\in\left[-T/2,\quad T/2\right]$$

A est une constante positive et $u(t)\in[-A, A]$, $\forall t$.

1.Calculer la puissance du signal $g(t)$

2. Représentation graphique de $g(t)$

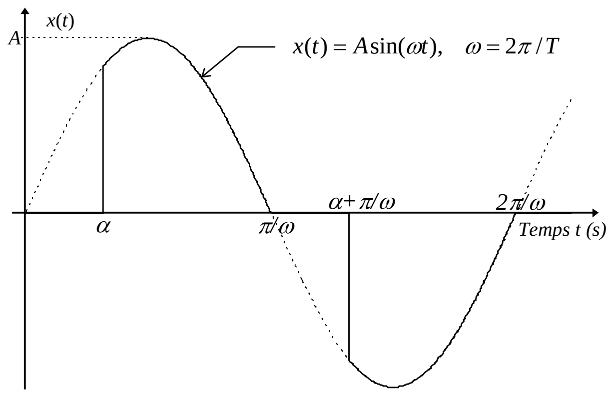
3. Représentation graphique de $x(t)$ pour $u(t)=u_0$=C[te]

4. Exprimer en fonction de u et de A, le rapport t^{-}/T

5. Calculer la valeur moyenne de $x(t)$

2. Représentation temporelle d'un signal

Calculer en fonction de u la puissance du signal suivant :



$$\alpha(u)=\frac{(10-u)T}{20},\quad u\in\left[0,\quad 10\right]$$

Pack ISI
Introduction au traitement du signal

I. Représentation temporelle et fréquentielle des signaux

II. Représentation temporelle et fréquentielle des systèmes linéaires

III. Notion de filtrage déterministe et statistique

IV. Introduction aux réseaux de neurones et aux systèmes d'inférences floues

I. Représentation temporelle et fréquentielle des signaux

1. Généralités sur les signaux

- **Définition**
- **Chaîne de traitement de l'information**
- **Classification des signaux**

2. Représentation temporelle d'un signal

- **Définitions**
- **Signaux particuliers**
- **Energie et puissance d'un signal**

3. Représentation fréquentielle d'un signal

- **Signaux périodiques : série de Fourier**
- **Signaux apériodiques : Transformée de Fourier**

3. Représentation fréquentielle d'un signal

L'objectif est d'explorer le contenu fréquentiel d'un signal

Notion de fréquence

Signaux sinusoïdaux (harmoniques)

$x(t) = \sin(2\pi f t + \phi)$

f est la fréquence du signal
$\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, est la pulsation du signal

Pour les autres

Généralement, on va essayer de les exprimer comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

Le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle est la décomposition en Série de Fourier (DSF), pour les signaux périodique ou la Transformée de Fourier (TF) pour les signaux non périodiques

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Cas des signaux périodiques : Décomposition en série de Fourier

Principe. Exprimer un signal $x(t)$ de période T comme une combinaison linéaire de signaux en sinus et cosinus

Un signal $x(t)$ périodique de période T, peut être développé sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \\ &= a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \phi_n\right) \end{aligned}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

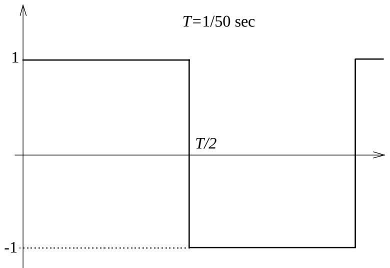
$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

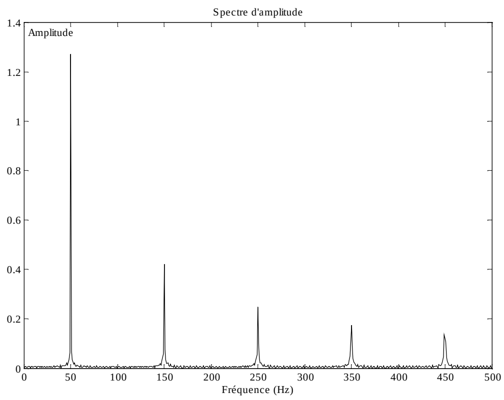
$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(\frac{n2\pi}{T}t\right)dt$$

A_n : **Spectre d'amplitude du signal**, ϕ_n : **Spectre de phase**

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Exemples de spectres



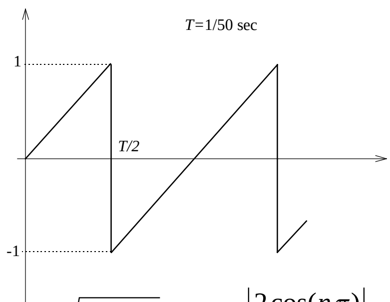


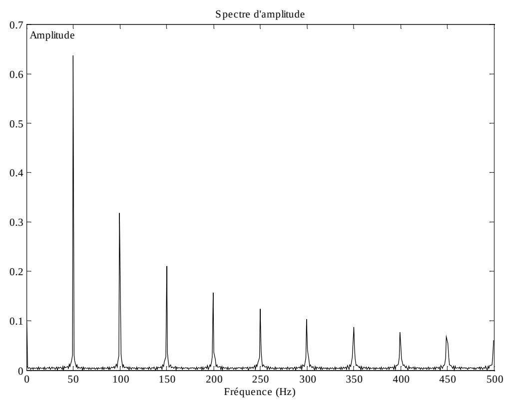
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{4}{n\pi}, \quad n \in \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\Omega t)}{n}, \qquad S(\omega) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\delta(\omega - n\Omega)$$

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Exemples de spectres





$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \left|\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}\right| = \frac{2}{n\pi}$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}\sin(n\Omega t), \qquad S(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\delta(\omega - n\Omega)$$

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Forme complexe de la en série de Fourier

$$\cos(n\Omega t) = \frac{e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}}{2}, \quad \sin(n\Omega t) = \frac{e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}}{2i}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\Omega t}, \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\Omega t}$$

Relation entre les coefficients $C_o = a_o$ $\quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad si\ n > 0 \quad C_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad si\ n < 0$

$|C_n|$: **Spectre d'amplitude du signal**, $\quad$ $\text{Arg}(C_n)$: **Spectre de phase**

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Relation de Parseval

Soit un signal périodique, de période T, la puissance moyenne calculée sur une période s'écrit:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\Omega t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \frac{\sin[(n+k)\pi]}{(n+k)\pi}$$

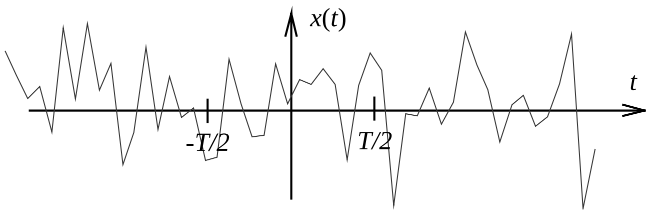
Pour n+k≠0, on a P=0. Pour n+k=0 on a :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \qquad \textbf{relation de Parseval}$$

La puissance moyenne d'un signal périodique (ou sa valeur quadratique moyenne) est égale à la somme du carré des amplitudes des harmoniques du spectre

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Cas d'un signal non périodique : Transformée de Fourier



Considérons le signal $x(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ comme étant un signal périodique, de période T, et soit $\Delta\omega = 2\pi/T$ sa pulsation. On peut donc écrire pour $t \in [-T/2, T/2]$:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Delta\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right) e^{jn\Delta\omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right) e^{jn\Delta\omega t}$$

3. Représentation fréquentielle d'un signal

Cas d'un signal non périodique : Transformée de Fourier

Le le signal $x(t)$ se déduit de $x_T(t)$ par passage à la limite

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right) e^{jn\Delta\omega t}$$

Pour $T \to \infty$, $\Delta\omega \to d\omega$, la somme discrète devient une sommation continue

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right) e^{jn\Delta\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

Transformée de Fourier de $x(t)$ $\quad X(j\omega) = F\left(x(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Transformée de Fourier inverse $X(j\omega)$ $\quad x(t) = F^{-1}\left(X(j\omega)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$|X(j\omega)|$ **Spectre d'amplitude de $x(t)$** $\quad Arg\left(X(j\omega)\right)$ **Spectre de phase de $x(t)$**

Spectre d'un signal échantillonné

$$x(t) \rightarrow X(j\omega)$$

$\omega_e = 2\pi/T$ $\quad T$

$$x^*(t) \rightarrow X^*(j\omega)$$

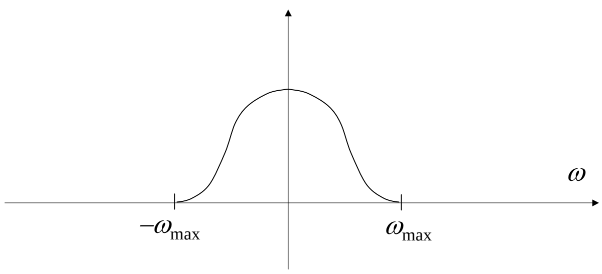
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left[j(\omega - n\omega_e)\right]$$

Il y a périodisation du spectre, le spectre du signal initial est répliqué avec une « période fréquentielle » égale à la pulsation d'échantillonnage ω_e

Interprétation graphique

Spectre du signal continu

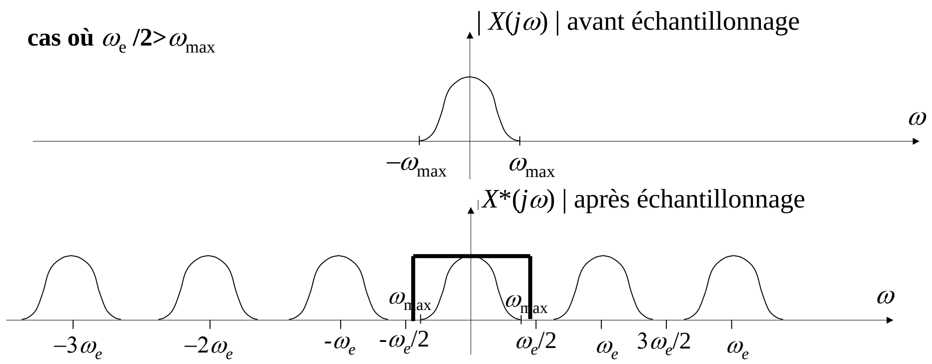
| $X(j\omega)$ |



Deux cas sont alors a distinguer : le cas où $\omega_e/2 > \omega_{max}$ **et le cas où** $\omega_e/2 < \omega_{max}$

Interprétation graphique

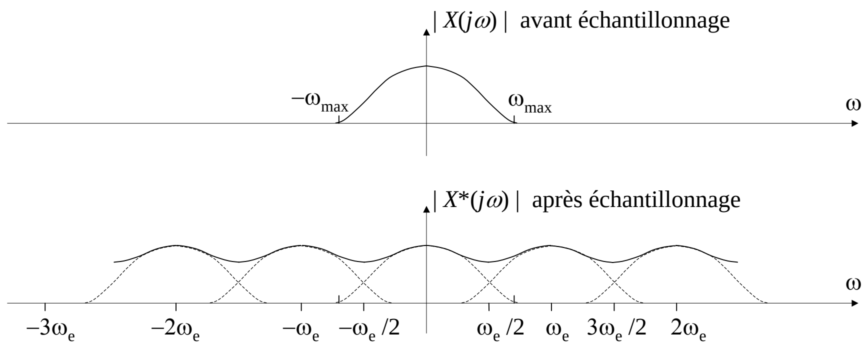
cas où $\omega_e /2 > \omega_{max}$



Le spectre initial n'est pas modifié dans l'intervalle $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$; donc un filtre avec une pulsation de coupure ω_f tel que $\omega_{max} < \omega_f < \omega_e /2$ permet de récupérer le spectre utile et ainsi de reconstituer le signal avant échantillonnage.

Interprétation graphique

cas où $\omega_e /2 < \omega_{max}$

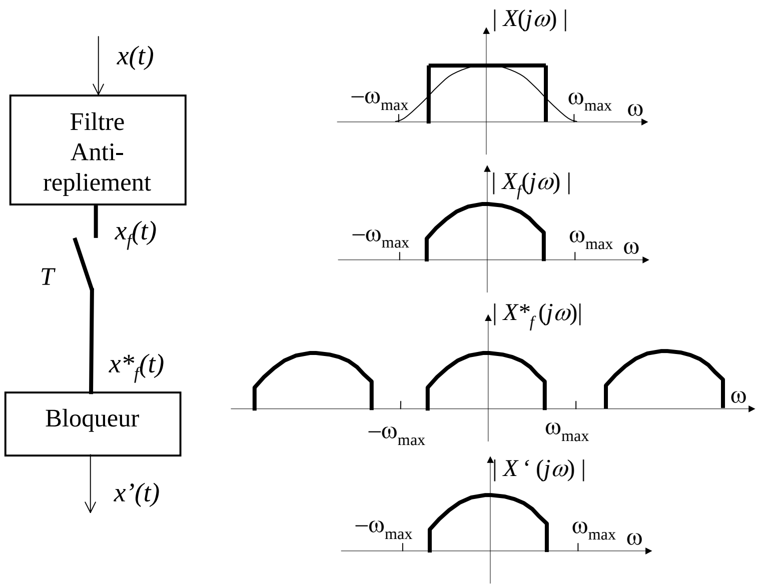


Il y a chevauchement des spectres voisins ; dans l'intervalle $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$ le spectre initial est dénaturé. Il n'est pas possible dans ce cas, de restituer le signal initial.

Théorème de Shannon

Pour reconstituer complètement le signal après échantillonnage à cadence $T = 2\pi/\omega_e$, il faut que la plus grande pulsation contenu dans le spectre du signal avant échantillonnage soit telle que $\omega_{max} < \omega_e/2$ L'utilisation d'un filtre idéal, après échantillonnage, permet de restituer le signal avant échantillonnage. Pour cela, la pulsation de coupure ω_f du filtre doit être telle que : $\omega_{max} < \omega_f < \omega_e/2$

Filtrage avant échantillonnage



Structure d'un asservissement numérique