

Plan du cours

Diagnostic des Systèmes Industriels

OBJECTIF : Ce cours présente les outils et méthodes nécessaires à la conception d'un système de diagnostic.

Le rôle essentiel d'un système de diagnostic est de détecter et de localiser un défaut avant que celui-ci ne conduise à une défaillance grave du système (FDI : Fault Detection and Isolation).

La mise en œuvre de ce type de méthode contribue donc à la sûreté de fonctionnement et la disponibilité de l'installation.

Sommaire

1. Position du problème
2. Les principes de base du diagnostic
3. Panorama général des méthodes de diagnostic
4. Diagnostic quantitatif
5. Diagnostic qualitatif
6. Evaluation

Bibliographie

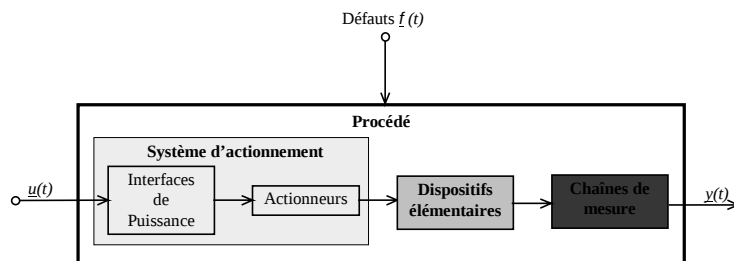
D. Maquin, J. Ragot, *Diagnostic des systèmes linéaires*, Hermès, 2000.

B. Dubuisson, *Automatique et statistiques pour le diagnostic*, Hermès, 2001.

R. Toscano, *Commande et diagnostic des systèmes dynamiques*, Ellipses, 2005.

1. Position du problème

Un procédé industriel est conçu pour satisfaire un objectif global bien défini



Forte sensibilité aux défaillances $\Rightarrow$ Perte de disponibilité de l'installation

$\Rightarrow$ Nécessité de concevoir un module permettant de lutter contre les défaillances

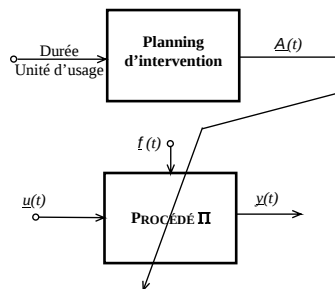
C'est précisément l'objectif de la maintenance préventive

1. Position du problème

L'objectif est d'exercer des actions sur le procédé afin de ne pas subir l'effet d'une défaillance

Maintenance préventive systématique

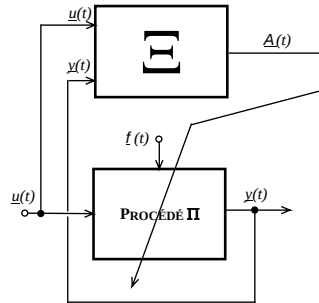
Les activités de maintenance sont planifiées en fonction du temps ou l'unité d'usage



Lors des interventions, les éléments sont remplacés même s'ils ne sont pas défectueux

Maintenance préventive conditionnelle

Les activités de maintenance sont déclenchées en fonction des mesures réalisées sur le procédé

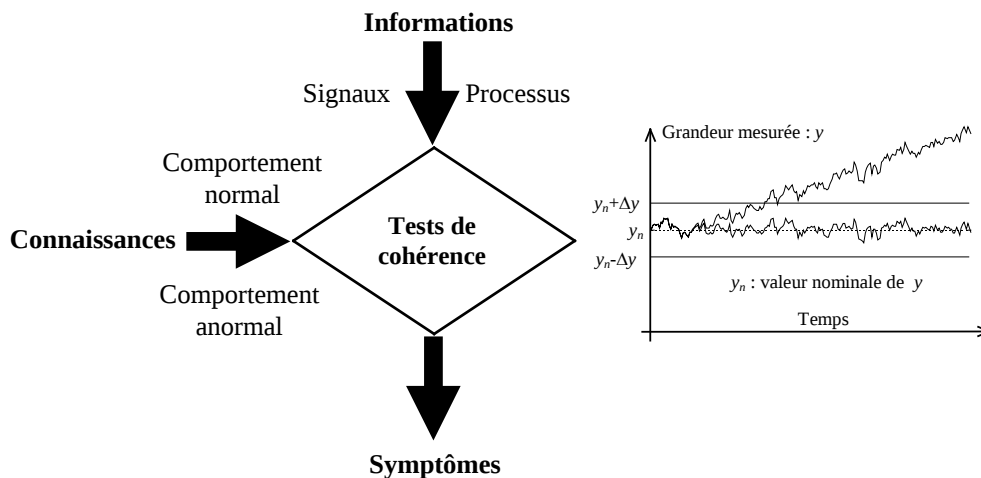


Les éléments ne sont remplacés que si nécessaire

2. Les principes de base du diagnostic

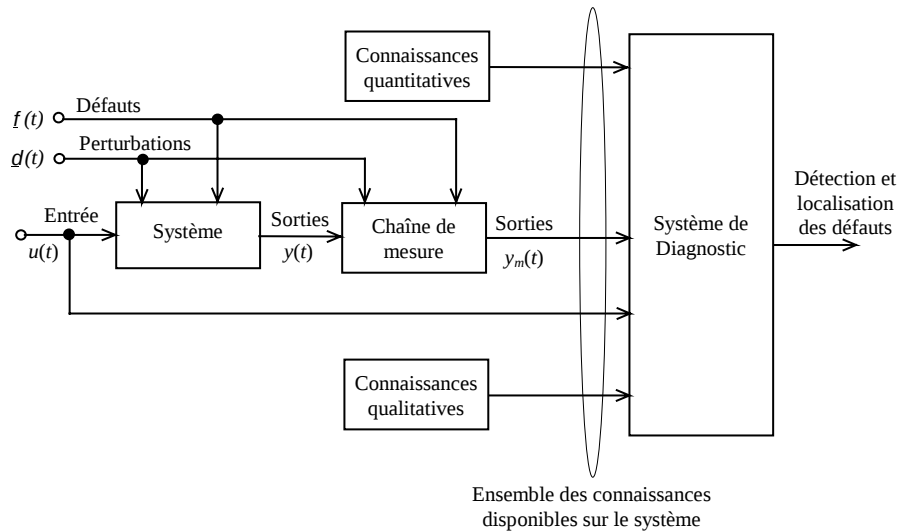
Principe de cohérence

Toute procédure de diagnostic procède nécessairement de tests de cohérence entre des informations (observations) et des connaissances a priori (modèles de comportement)



2. Les principes de base du diagnostic

Le problème qui se pose en diagnostic est de pouvoir détecter et localiser un élément défaillant à partir de l'ensemble des connaissances disponibles sur l'installation



2. Les principes de base du diagnostic

Quelques définitions

Défaut : On appelle défaut tout écart entre la caractéristique observée sur le dispositif et sa caractéristique théorique

Défaillance : Une défaillance est l'altération ou la cessation d'un dispositif à accomplir sa ou ses fonctions requises avec les performances définies dans les spécifications techniques. Une défaillance résulte d'un défaut

Panne : Une panne est l'incapacité d'un dispositif à accomplir une fonction requise. Une panne résulte toujours d'une défaillance

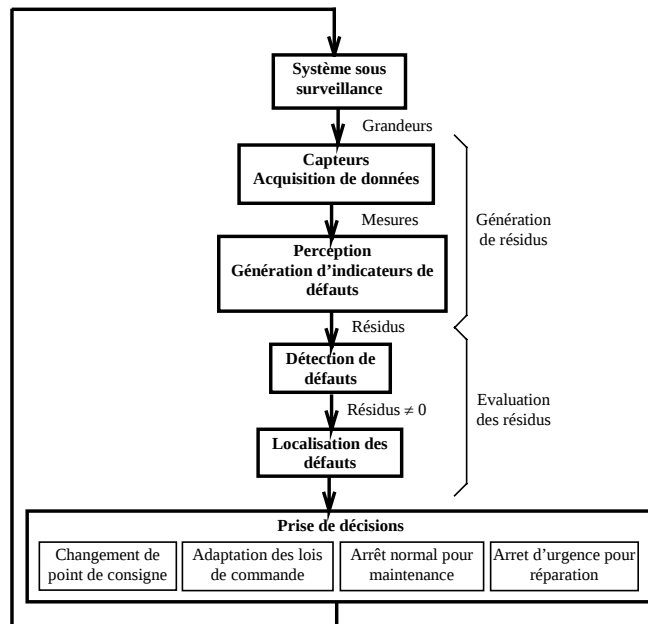
Défaut $\longrightarrow$ Défaillance $\longrightarrow$ Panne

Le système de diagnostic doit être capable de détecter et de localiser un défaut avant que celui-ci ne conduise à une défaillance ou une panne qui entraînerait l'arrêt du système

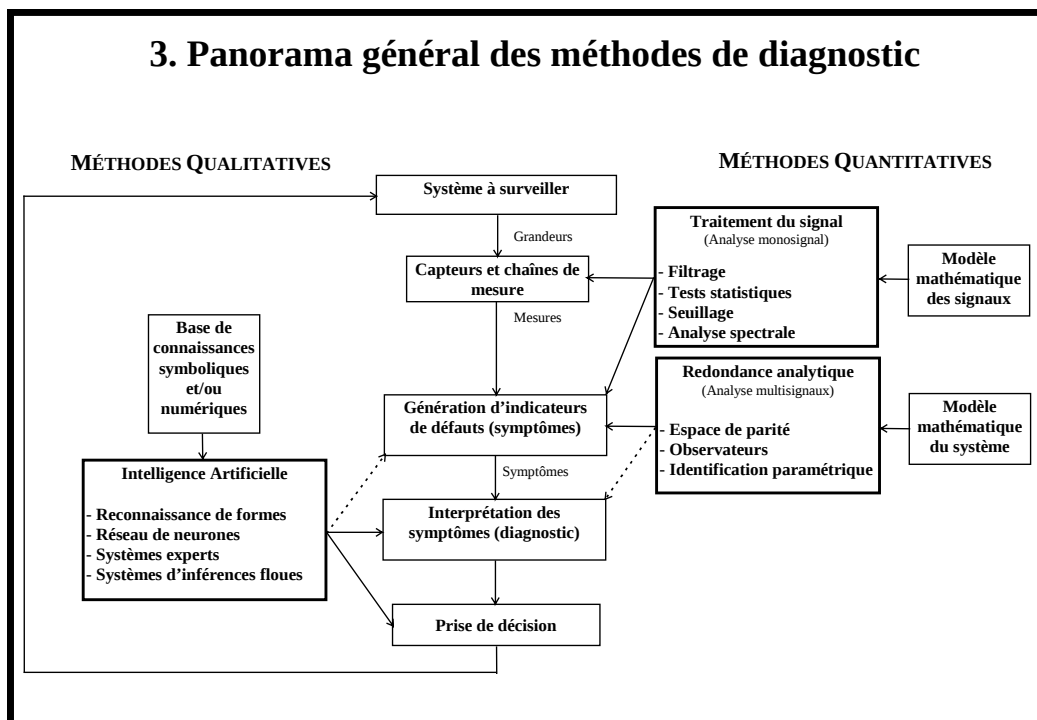
Détection de défauts : La détection d'un défaut consiste à décider si le système se trouve ou non dans un état de fonctionnement normal

Localisation d'un défaut : A l'issue de la détection d'un défaut, il s'agit de déterminer le ou les éléments à l'origine du défaut

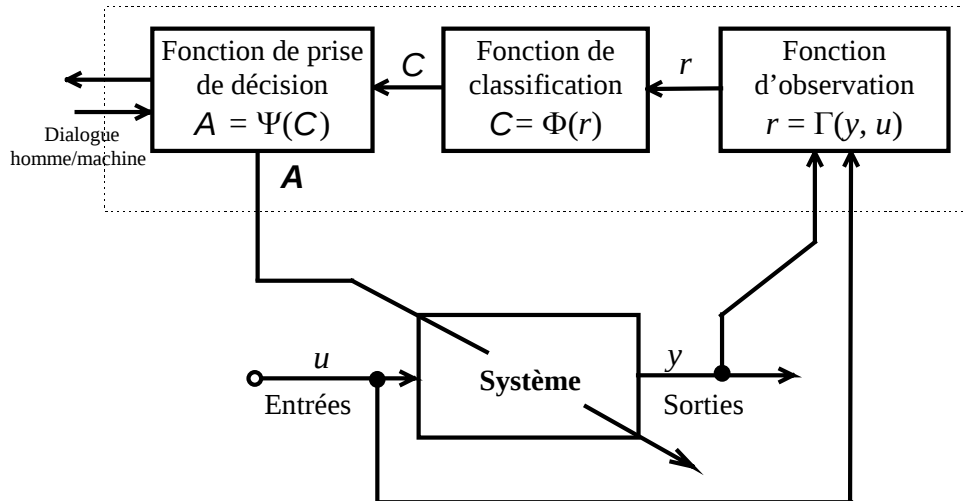
2. Les principes de base du diagnostic



3. Panorama général des méthodes de diagnostic

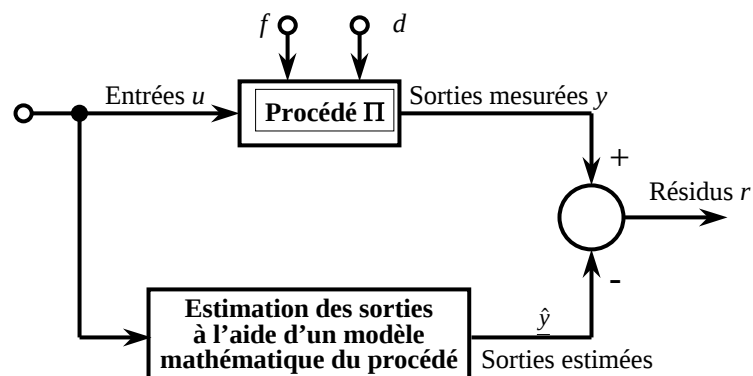


Structure générale d'un système de diagnostic



4. Diagnostic quantitatif

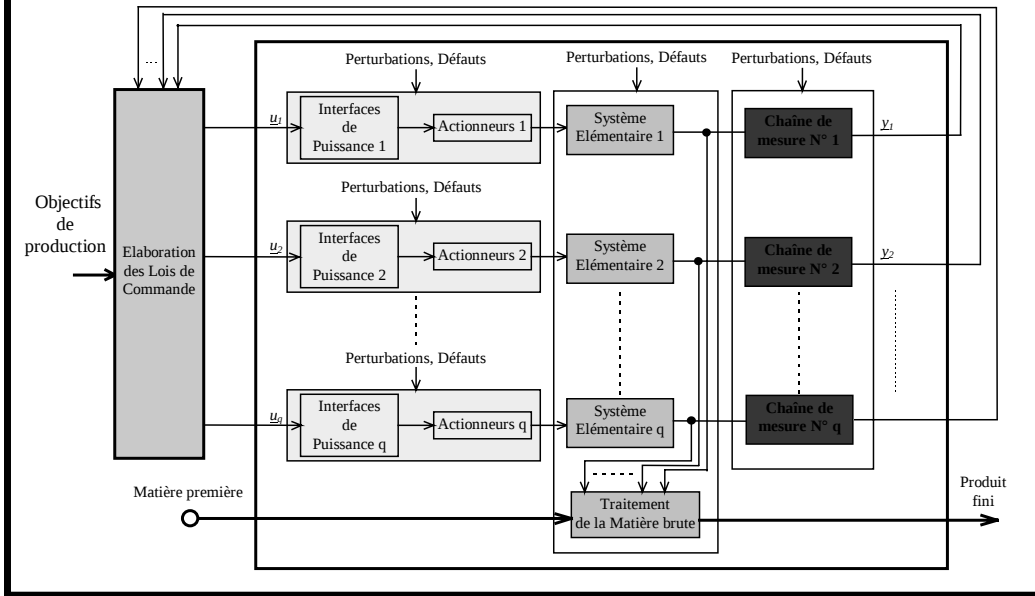
Ce type d'approche consiste à estimer à l'aide d'un modèle mathématique du système, les grandeurs mesurées sur celui-ci



Si le modèle reflète bien le comportement du système sans défaut, tout écart entre les grandeurs estimées et mesurées traduira l'apparition d'un ou plusieurs défauts

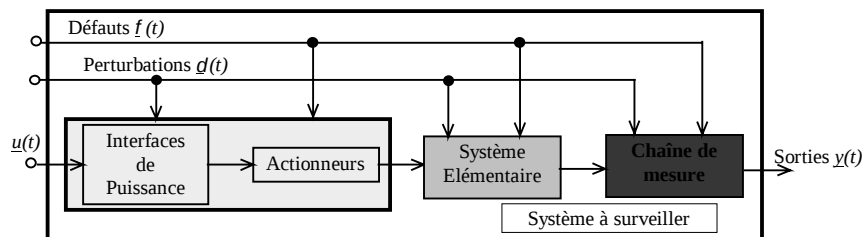
4. Diagnostic quantitatif

Le système à surveiller et son modèle mathématique



4. Diagnostic quantitatif

Le système à surveiller et son modèle mathématique



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), f(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t), d(t), f(t)) \end{cases} \xrightarrow{\text{Linéarisation}} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x f(t) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y f(t) + D_y d(t) \end{cases}$$

x : vecteur d'état de dimension n

u : vecteur de commande de dimension m

y : vecteur de sortie de dimension p

d : vecteur des perturbations de dimension q

f : vecteur des défauts de dimension r

f, h : champs vectoriels continus dérivables

A : Matrice d'évolution

B : Matrice de commande

C : Matrice de sortie

F_x : Matrice d'application des défauts sur l'état

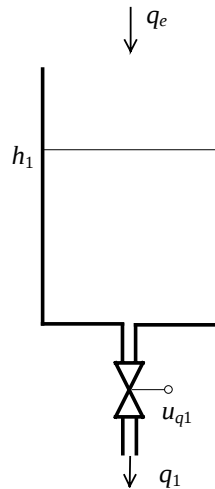
F_y : Matrice d'application des défauts en sortie

D_x : Matrice d'application des perturbations sur l'état

D_y : Matrice d'application des perturbations en sortie

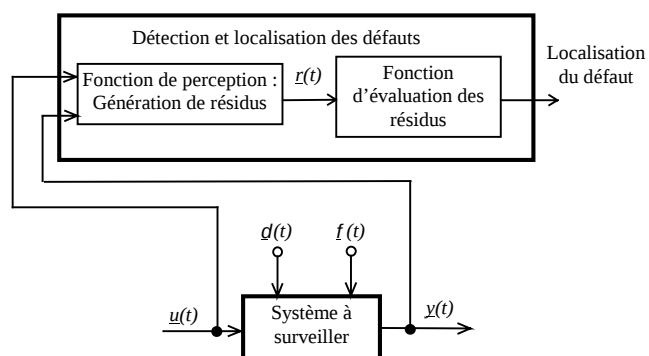
4. Diagnostic quantitatif

Un exemple simple de modélisation



4. Diagnostic quantitatif

Structure générale



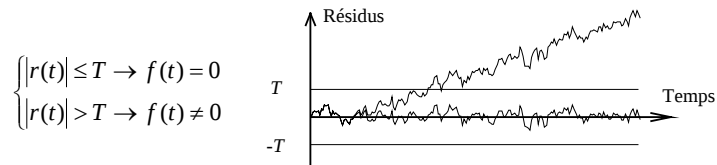
Modèle mathématique du système à surveiller

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x f(t) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y f(t) + D_y d(t) \end{cases}$$

4. Diagnostic quantitatif

Détection et localisation des défauts

Un défaut est détecté en comparant une fonction d'évaluation des résidus à un seuil



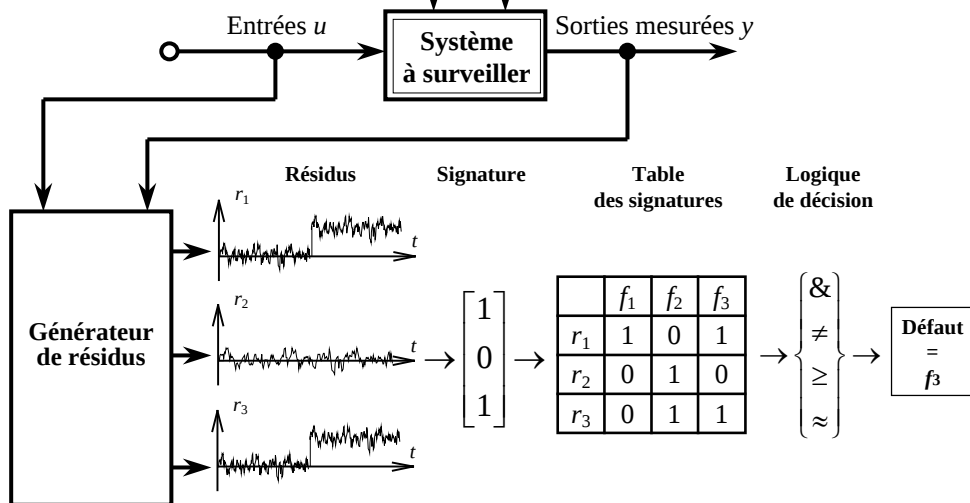
Lorsqu'un défaut est détecté, il s'agit de le localiser. Cette Localisation est réalisée à partir de la table des signatures, définie par la matrice de transfert défauts-résidus $H_y G_f$

$$\begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ r_3(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 & G_{13}(s) \\ 0 & G_{22}(s) & 0 \\ 0 & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix}}_{H_y(s)G_f(s)} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline r_1 & 1 & 0 & 1 \\ r_2 & 0 & 1 & 0 \\ r_3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

4. Diagnostic quantitatif

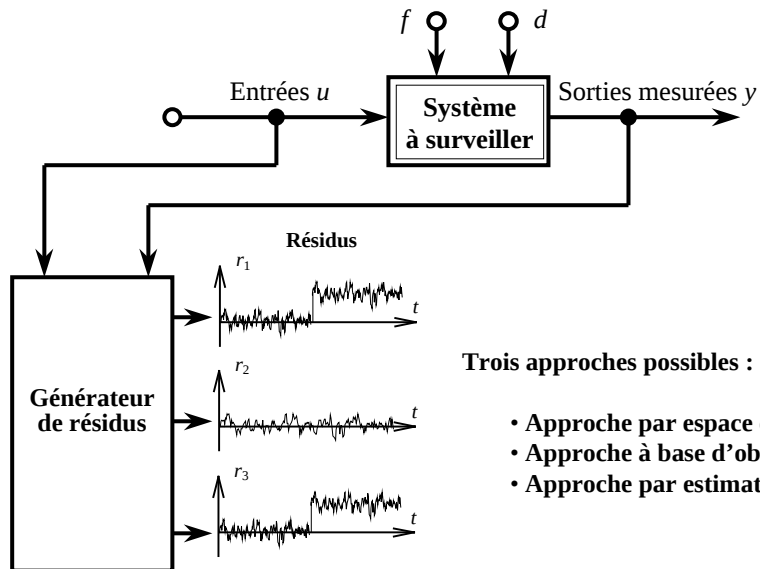
Détection et localisation des défauts

$$f^T = [f_1 \quad f_2 \quad f_3] = [0 \quad 0 \quad \times] \quad f \quad d$$



4. Diagnostic quantitatif

Synthèse d'un générateur de résidus



Cadre général : Sûreté de fonctionnement des systèmes.

Objectif : Détecter et localiser un défaut avant que celui-ci ne conduise à une défaillance grave du système (FDI : Fault Detection and Isolation).

Finalité : Maintenance conditionnelle des systèmes.

Toute méthode de diagnostic est fondée sur le principe de cohérence

Méthodes quantitatives

Méthodes à base de modèles mathématiques. On génère des signaux (les résidus) sensibles uniquement aux défauts.

- On élabore un diagnostic par analyse des propriétés statistiques, spectrales etc. des signaux mesurés (analyse monosignal).
- On élabore un diagnostic sur la base des relations existantes entre les différents signaux mesurés (analyse multiségnal, redondance analytique)

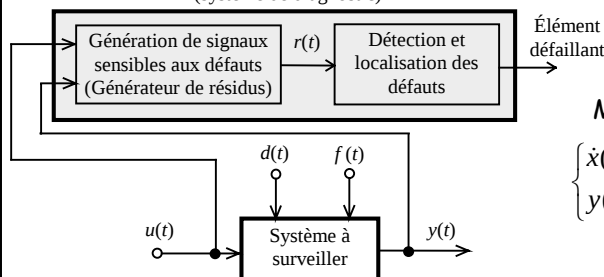
Méthodes qualitatives

Méthodes à base de connaissances expertes ou numériques.

- On élabore un diagnostic par exploitation des avis d'experts.
- On élabore un diagnostic sur la base des historiques de fonctionnement de l'installation (Reconnaissance de forme).

Méthodes quantitatives par redondance analytique

Organe de détection et de localisation des défauts (système de diagnostic)



Modèle mathématique du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x f(t) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y f(t) + D_y d(t) \end{cases}$$

· Approche par espace de parité

Trois approches possibles : · Approche à base d'observateurs

· Approche par estimation paramétrique

Espace de parité - Idée directrice

L'idée de base consiste à vérifier la cohérence entre les relations mathématiques du système et les mesures : relations de redondance analytique.

- **Redondance statique** : ensemble de relations algébriques entre les mesures instantanées fournies par les différents capteurs.
- **Redondance dynamique** : ensemble d'équations différentielles ou récurrentes entre les sorties mesurées (capteurs) et les entrées du système.

Espace de parité - Redondance statique

Modèle mathématique du système de mesure

$$y(t) = (C + \Delta C)x(t) + F_y f(t) + D_y d(t)$$

Modèle simplifiée

$$y(t) = Cx(t) + f_y(t)$$

$$y \in \mathbf{R}^q, \quad C \in \mathbf{R}^{q \times n}, \quad f_y \in \mathbf{R}^q$$

Les équations de redondance sont obtenues par élimination du vecteur d'état $\longrightarrow \begin{cases} \text{rang}(C) = n \\ q > n \end{cases}$

Il est alors possible de trouver une matrice V orthogonale à C $\longrightarrow \begin{cases} V \in \mathbf{R}^{(q-n) \times q} \\ VC = 0 \end{cases}$

Espace de parité - Redondance statique

$$y(t) = Cx(t) + f_y(t) \Leftrightarrow \underbrace{Vy(t)}_{r(t)} = \underbrace{VCx(t)}_{=0} + Vf_y(t)$$

$r(t)$ est le vecteur des résidus (ou vecteur de parité), il ne dépend que des défauts. Le vecteur des résidus appartient à l'espace de parité qui est de dimension $\text{rang}(V)$. Si les $q-n$ lignes de V sont indépendantes : $\text{rang}(V)=q-n$.

$$\rightarrow \begin{cases} r(t) = Vf_y(t) \\ r \in R^{(q-n)} \end{cases}$$

Remarque : $V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \end{bmatrix}$, $VC = 0 \Leftrightarrow v_i^T C = 0, \quad \forall i = 1, \dots, q-n$

Espace de parité - Redondance statique Recherche d'une matrice V orthogonale à C

$$y(t) = Cx(t) + f_y(t) \rightarrow y'(t) = C'x'(t) + f_y'(t)$$

$$y' = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{q-n} \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{q-n} \end{bmatrix}, \quad f_y' = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{q-n} \end{bmatrix}$$

$$y'(t) = C'x'(t) + f_y'(t) \rightarrow \begin{cases} y_n(t) = C_n x'(t) \\ y_{q-n}(t) = C_{q-n} x'(t) \end{cases} \rightarrow y_{q-n}(t) = C_{q-n} C_n^{-1} y_n(t)$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -C_{q-n} C_n^{-1} & I \end{bmatrix}}_{V'} \begin{bmatrix} y_n(t) \\ y_{q-n}(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{on peut vérifier que : } V' C' = 0$$

Espace de parité - Redondance statique Le problème du découplage

L'approche présentée ne prend en compte ni l'effet des perturbations ni les incertitudes de modèle. On utilise maintenant le modèle complet du système de mesure :

$$y(t) = (C + \Delta C)x(t) + F_y f(t) + D_y d(t) \Leftrightarrow y(t) = Cx(t) + F_y f(t) + D'_y d'(t)$$

$$\text{avec : } D'_y = [\Delta C \quad I], \quad d'(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$

Il s'agit de générer des équations de redondance sensibles aux défauts et insensibles aux entrées inconnues. On recherche l'ensemble des vecteurs ligne v^T tq :

$$v^T y(t) = v^T Cx(t) + v^T F_y f(t) + v^T D'_y d'(t), \quad \text{avec : } \begin{cases} v^T C = 0 \\ v^T F_y \neq 0 \\ v^T D'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{C'est le découplage} \\ \text{parfait qui n'a pas} \\ \text{toujours de solution.} \end{array}$$

Espace de parité - Redondance statique Le problème du découplage

Découplage approché. Au lieu de rechercher v^T satisfaisant les conditions du découplage parfait, on cherche v^T permettant de maximiser la sensibilité aux défauts tout en minimisant l'influence des perturbations. On est alors amené à résoudre un problème d'optimisation multicritère sous contraintes :

Découplage parfait

$$\begin{cases} v^T C = 0 \\ v^T F_y \neq 0 \\ v^T D'_y = 0 \end{cases}$$

Découplage approché

Problème multicritère
avec contrainte

$$\begin{cases} v^T C = 0 \\ \max_{v^T} \|v^T F_y\|_2^2 \\ \min_{v^T} \|v^T D'_y\|_2^2 \end{cases}$$

Problème monocritère
avec contrainte

$$\begin{cases} v^T C = 0 \\ \min_{v^T} \frac{\|v^T D'_y\|_2^2}{\|v^T F_y\|_2^2} \end{cases}$$

Représentation d'état du système :
$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Cette relation permet de prédire le vecteur de sortie à un instant $k+h$ quelconque à partir de l'état à l'instant k et des entrées aux instants k à $k+h-1$:

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) \\ y(k+1) &= CFx(k) + CGu(k) \\ y(k+2) &= CF^2x(k) + CFGu(k) + CGu(k+1) \\ y(k+3) &= CF^3x(k) + CF^2Gu(k) + CFGu(k+1) + Gu(k+2) \\ &\vdots \\ y(k+h) &= CF^hx(k) + CF^{h-1}Gu(k) + CF^{h-2}Gu(k+1) + \dots + CGu(k+h-1) \end{aligned}$$

Forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^h \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CG & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CFG & CG & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CF^{h-1}G & CF^{h-2}G & \dots & CG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+h) \end{bmatrix}$$

Pour chacun des capteurs on a :

$$\begin{bmatrix} y_j(k) \\ y_j(k+1) \\ y_j(k+2) \\ \vdots \\ y_j(k+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j \\ C_jF \\ C_jF^2 \\ \vdots \\ C_jF^h \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_jG & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_jFG & C_jG & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_jF^{h-1}G & C_jF^{h-2}G & \dots & C_jG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+h) \end{bmatrix}$$

où C_j représente le vecteur ligne numéro j de la matrice C . Cette relation s'écrit sous forme plus condensée :

$$Y_j(k, h) = C_j(h)x(k) + G_j(h)U(k, h)$$

Soit n_j le rang maximum de la matrice $C_j(h)$. Dans ces conditions, nous pouvons exprimer n_j composantes du vecteur d'état à l'aide des n_j mesures $y_j(k)$ à $y_j(k+n_j)$. La matrice de rang maximum $C_j(n_j)$ est appelée matrice d'observabilité réduite. La relation s'écrit alors :

$$Y_j(k, n_j) = C_j(n_j)x(k) + G_j(n_j)U(k, n_j)$$

Afin d'obtenir de la redondance, on ajoute une ligne supplémentaire, la relation devient donc :

$$Y_j(k, n_j + 1) = C_j(n_j + 1)x(k) + G_j(n_j + 1)U(k, n_j + 1)$$

Les relations d'inter-redondance permettent de relier les mesures provenant de plusieurs capteurs. On les obtient en considérant les n_j ($j=1$ à q) relations indépendantes obtenues à partir de :

$$Y_j(k, n_j) = C_j(n_j)x(k) + G_j(n_j)U(k, n_j)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} Y_1(k, n_1) \\ \vdots \\ Y_j(k, n_j) \\ \vdots \\ Y_q(k, n_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(n_1) \\ \vdots \\ C_j(n_j) \\ \vdots \\ C_q(n_q) \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} G_1(n_1) \\ \vdots \\ G_j(n_j) \\ \vdots \\ G_q(n_q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(k, n_1) \\ \vdots \\ U(k, n_j) \\ \vdots \\ U(k, n_q) \end{bmatrix}$$

Ce système est composé de N relations indépendantes, avec : $N = \sum_{j=1}^q n_j$

Le vecteur d'état étant de dimension n , il existe $N-n$ relations d'inter-redondances indépendantes. Les équations d'inter-redondance sont obtenues par élimination du vecteur d'état.

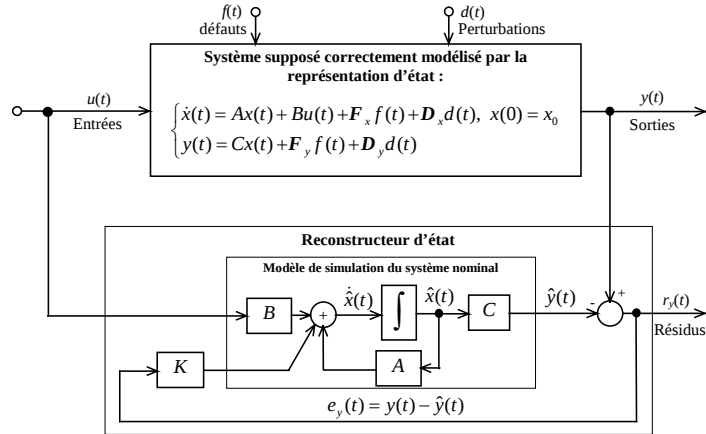
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_F \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_G \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}}_{u(k)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}}_{y(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot x(k)$$

Le rang de la matrice d'observabilité réduite par rapport à y_1 et y_2 est de deux ce qui permet d'écrire quatre relations indépendantes et donc une relation d'inter-redondance.

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 \\ \underline{C}_1 F \\ \underline{C}_2 \\ \underline{C}_2 F \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{C}_1 G \\ \underline{0} \\ \underline{C}_2 G \end{bmatrix} \cdot u(k) \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

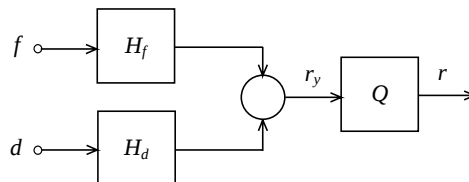
$$r(k) = 0.4y_1(k) - 0.2y_1(k-1) + y_2(k) - 0.5y_2(k-1) - u_1(k-1) - u_2(k-1)$$



$$r_y(s) = H_f(s)f(s) + H_d(s)d(s) \text{ avec : } \begin{cases} H_f(s) = C[sI - (A - KC)]^{-1}(F_x - KF_y) \\ H_d(s) = C[sI - (A - KC)]^{-1}(D_x - KD_y) + D_y \end{cases}$$

La matrice de gains K est calculée telle que : $\lambda(A - KC) \subset C^-$

On génère un vecteur résidu $r(s)$ tel que $r(s) = Q(s)r_y(s)$, où $Q(s)$ est une matrice de paramétrisation.



On calcul $Q(s)$ telle que $Q(s)H_f(s) \neq 0$ et $Q(s)H_d(s) = 0$

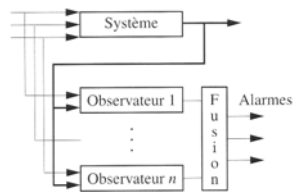


Figure 3.1. Observateur à entrées inconnues (DOS) pour la détection de défauts d'actionneurs

Structure DOS (Dedicated Observer Scheme). Le i ème observateur est piloté par la i ème entrée et toutes les sorties ; les $(m-1)$ autres entrées sont considérées comme inconnues. La sortie de ce i ème observateur est insensible aux défauts des entrées non utilisées.

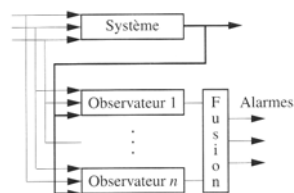


Figure 3.2. Observateur à entrées inconnues (GOS) pour la détection de défauts d'actionneurs

Structure GOS (Generalized Observer Scheme). Le i ème observateur est piloté par toutes les entrées, sauf la i ème et toutes les sorties. La sortie de ce i ème observateur est donc sensible aux défauts de toutes les entrées sauf ceux de la i ème.

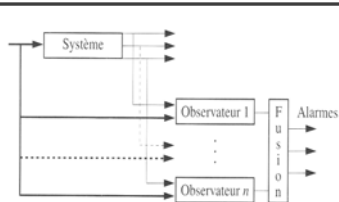


Figure 3.3. Observateurs dédiés (DOS) pour la détection de défauts de capteurs

Structure DOS (Dedicated Observer Scheme). Le i ème observateur est piloté par la i ème sortie et toutes les entrées ; les $(q-1)$. La sortie de ce i ème observateur est insensible aux défauts des sorties non utilisées.

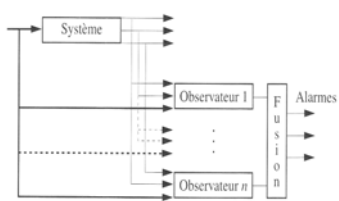
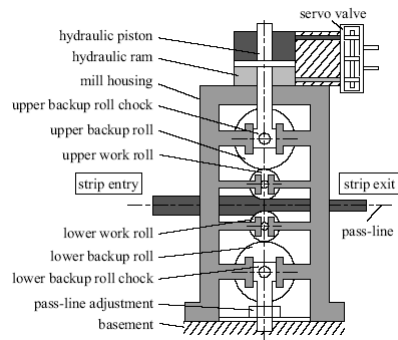


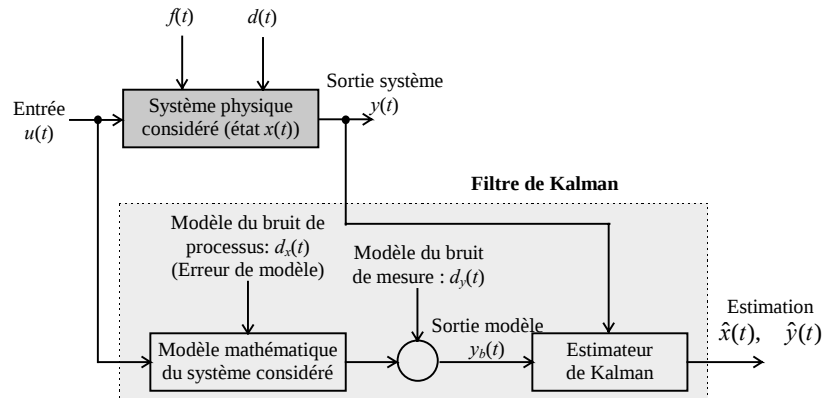
Figure 3.4. Observateurs généralisés (GOS) pour la détection de défauts de capteurs

Structure GOS (Generalized Observer Scheme). Le i ème observateur est piloté par toutes les sorties, sauf la i ème et toutes les entrées. La sortie de ce i ème observateur est donc sensible aux défauts de toutes les sorties sauf ceux de la i ème.



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 0.0002 \\ 0 & 50000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} F_r$$

$$\begin{bmatrix} y_x \\ y_v \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$



Le filtre de Kalman considère deux types de bruits :

Le bruit de structure $d_x(t)$ ou de processus. Il correspond à des entrées perturbatrices ou bien à des phénomènes difficilement modélisables ou encore à des erreurs de modélisation.

Le bruit d'observation $d_y(t)$ ou bruit de mesure. Il possède des caractéristiques fréquentielles différentes de celles de signal utile. En filtrage classique, c'est le seul qui est considéré

Le filtre de Kalman est un reconstituteur d'état optimal prenant en compte l'influence des entrées inconnues.

Les entrées inconnues sont modélisées à l'aide de variables aléatoires gaussiennes dont les paramètres statistiques sont supposés connus.

L'estimation est optimale au sens de la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation.

Le filtre de Kalman permet d'atténuer les incertitudes en accordant plus d'importance à ce qui est certain.

Le système est supposé correctement modélisé à l'aide de la représentation d'état suivante (système LPV):

$$\begin{cases} x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) + d_x(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + d_y(k) \end{cases}$$

$d_x(k)$: vecteur des entrées inconnues agissant sur l'état (bruit d'état ou de structure). Il permet de rendre compte de l'influence des erreurs de modélisation et des perturbations sur l'état.

$d_y(k)$: vecteur des entrées inconnues agissant sur les sorties (bruit de mesure). Il permet de rendre compte de l'influence des erreurs de modélisation et des perturbations sur les sorties.

Modèle du système :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) + d_x(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + d_y(k) \end{cases}$$

$d_x(k)$: bruit blanc gaussien de moyenne nulle $E[d_x(k)] = 0$ et de matrice de variance - covariance : $Q(k) = E[d_x(k)d_x^T(k)]$

$d_y(k)$: bruit blanc gaussien de moyenne nulle $E[d_y(k)] = 0$ et de matrice de variance - covariance : $R(k) = E[d_y(k)d_y^T(k)]$

$d_x(k)$ et $d_y(k)$ sont indépendants : $E[d_x(k)d_y^T(k)] = 0$.

Système :

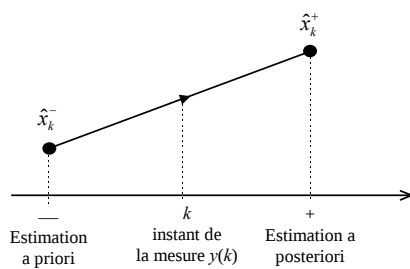
$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + d_{x,k} \\ y_k = C_k x_k + d_{y,k} \end{cases}$$

Matrice de variance - covariance du

bruit de structure : $Q_k = E[d_{x,k} d_{x,k}^T]$

Matrice de variance - covariance du

bruit de mesure : $R_k = E[d_{y,k} d_{y,k}^T]$



$\hat{x}_k^-$ estimation de x_k avant la mesure de y_k
c'est l'estimation a priori

$\hat{x}_k^+$ estimation de x_k après la mesure de y_k
c'est l'estimation a posteriori

$\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$: erreur d'estimation a priori

$\tilde{x}_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+$: erreur d'estimation a posteriori

On note P_k^- la matrice de variance covariance de l'erreur d'estimation a priori :

$$P_k^- = E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T] = \begin{bmatrix} E[(\tilde{x}_{1,k}^-)^2] & E[\tilde{x}_{1,k}^- (\tilde{x}_{2,k}^-)^T] & \cdots & E[\tilde{x}_{1,k}^- (\tilde{x}_{n,k}^-)^T] \\ E[\tilde{x}_{2,k}^- (\tilde{x}_{1,k}^-)^T] & E[(\tilde{x}_{2,k}^-)^2] & \cdots & E[\tilde{x}_{2,k}^- (\tilde{x}_{n,k}^-)^T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[\tilde{x}_{n,k}^- (\tilde{x}_{1,k}^-)^T] & E[\tilde{x}_{n,k}^- (\tilde{x}_{2,k}^-)^T] & \cdots & E[(\tilde{x}_{n,k}^-)^2] \end{bmatrix}$$

La diagonale de P_k^- contient la variance de l'erreur a priori.

On note P_k^+ la matrice de variance covariance de l'erreur d'estimation a posteriori :

$$P_k^+ = E[\tilde{x}_k^+ (\tilde{x}_k^+)^T] = \begin{bmatrix} E[(\tilde{x}_{1,k}^+)^2] & E[\tilde{x}_{1,k}^+ (\tilde{x}_{2,k}^+)^T] & \cdots & E[\tilde{x}_{1,k}^+ (\tilde{x}_{n,k}^+)^T] \\ E[\tilde{x}_{2,k}^+ (\tilde{x}_{1,k}^+)^T] & E[(\tilde{x}_{2,k}^+)^2] & \cdots & E[\tilde{x}_{2,k}^+ (\tilde{x}_{n,k}^+)^T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[\tilde{x}_{n,k}^+ (\tilde{x}_{1,k}^+)^T] & E[\tilde{x}_{n,k}^+ (\tilde{x}_{2,k}^+)^T] & \cdots & E[(\tilde{x}_{n,k}^+)^2] \end{bmatrix}$$

La diagonale de P_k^+ contient la variance de l'erreur a posteriori.

$$\text{Système : } \begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + d_{x,k} \\ y_k = C_k x_k + d_{y,k} \end{cases}$$

Les hypothèses pour la construction du filtre

$E[\tilde{x}_k^-] = 0$: la moyenne de l'erreur d'estimation a priori est centrée

$\hat{x}_k^+ = K_k' \hat{x}_k^- + K_k y_k$: l'estimation d'état a posteriori est combinaison linéaire de l'estimation a priori et de la mesure

Les objectifs du filtre de Kalman

Il s'agit de déterminer K_k' et K_k telles que :

$E[\tilde{x}_k^+] = 0$: moyenne de l'erreur d'estimation a posteriori centrée.

$[K_k', K_k]_{opt} = \arg \min_{K_k', K_k} E[(\tilde{x}_k^+)^T \tilde{x}_k^+]$: variance de l'erreur d'estimation a posteriori minimale. Estimation à variance minimale.

$$E[(\tilde{x}_k^+)^T \tilde{x}_k^+] = \sum_{i=1}^n E[(\tilde{x}_{i,k}^+)^2] = \text{trace}(P_k^+)$$

E désigne une moyenne d'ensemble ou moyenne des réalisations.

$E[x_k]$: moyenne des réalisations de la variable aléatoire x_k à l'instant k .

Si F_k est une matrice dépendante du temps, on a : $E[F_k x_k] = F_k E[x_k]$, la matrice F est constante quelque soit la réalisation de la va à l'instant k .

L'opérateur E est une moyenne d'ensemble et non une moyenne dans le temps.

Condition pour que l'erreur d'estimation a posteriori soit à moyenne nulle

On veut $E[\tilde{x}_k^+] = 0$ avec :
$$\begin{cases} \tilde{x}_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ \\ \hat{x}_k^+ = K_k' \hat{x}_k^- + K_k y_k \end{cases}$$

$$\tilde{x}_k^+ = x_k - K_k' \hat{x}_k^- - K_k y_k \text{ or : } \begin{cases} y_k = C_k x_k + d_{y,k} \\ \hat{x}_k^- = x_k - \tilde{x}_k^- \end{cases}$$

$$\tilde{x}_k^+ = x_k - K_k' (x_k - \tilde{x}_k^-) - K_k (C_k x_k + d_{y,k})$$

$$\tilde{x}_k^+ = (I - K_k' - K_k C_k) x_k + K_k' \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k}$$

$$E[\tilde{x}_k^+] = (I - K_k' - K_k C_k) E[x_k] + \underbrace{K_k' E[\tilde{x}_k^-]}_{=0} - \underbrace{K_k E[d_{y,k}]}_{=0}$$

donc $E[\tilde{x}_k^+] = 0$ si $I - K_k' - K_k C_k = 0$, soit : $K_k' = I - K_k C_k$

En reportant dans l'expression de $\hat{x}_k^+$ il vient :

$$\hat{x}_k^+ = (I - K_k C_k) \hat{x}_k^- + K_k y_k \text{ soit aussi : } \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k^-)$$

Condition pour que l'erreur d'estimation a posteriori soit à variance minimale

Il s'agit de déterminer K_k de façon à minimiser : $E[(\tilde{x}_k^+)^T \tilde{x}_k^+] = \sum_{i=1}^n E[(\tilde{x}_{i,k}^+)^2] = \text{trace}(P_k^+)$

$$\tilde{x}_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ = x_k - (I - K_k C_k) \hat{x}_k^- - K_k y_k$$

$$\tilde{x}_k^+ = x_k - (I - K_k C_k) (x_k - \tilde{x}_k^-) - K_k (C_k x_k + d_{y,k})$$

$$\tilde{x}_k^+ = (I - K_k C_k) \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k} = K_k' \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k}$$

$$P_k^+ = E[\tilde{x}_k^+ (\tilde{x}_k^+)^T] = E[(K_k' \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k}) (K_k' \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k})^T]$$

$$P_k^+ = E[(K_k' \tilde{x}_k^- - K_k d_{y,k}) ((\tilde{x}_k^-)^T (K_k')^T - d_{y,k}^T K_k^T)]$$

$$P_k^+ = E[K_k' \tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T (K_k')^T - K_k' \tilde{x}_k^- d_{y,k}^T K_k^T - K_k d_{y,k} (\tilde{x}_k^-)^T (K_k')^T + K_k d_{y,k} d_{y,k}^T K_k^T]$$

$$P_k^+ = K_k' \underbrace{E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T]}_{P_k^-} (K_k')^T - \underbrace{K_k' E[\tilde{x}_k^- d_{y,k}^T]}_{=0} K_k^T - K_k \underbrace{E[d_{y,k} (\tilde{x}_k^-)^T]}_{=0} (K_k')^T + K_k \underbrace{E[d_{y,k} d_{y,k}^T]}_{R_k} K_k^T$$

$$P_k^+ = K_k' P_k^- (K_k')^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k C_k) P_k^- (I - K_k C_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

Condition pour que l'erreur d'estimation a posteriori soit à variance minimale

$$P_k^+ = K_k' P_k^- (K_k')^T + K_k R_k K_k^T = (I - K_k C_k) P_k^- (I - K_k C_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

$$P_k^+ = P_k^- - P_k^- C_k^T K_k^T - K_k C_k P_k^- + K_k C_k P_k^- C_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T \quad (*)$$

$$P_k^+ = P_k^- - 2K_k C_k P_k^- + K_k C_k P_k^- C_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T$$

On veut une estimation à variance minimale. La matrice K_k optimale

est définie par : $K_k = \arg \min_{K_k} (\text{trace}(P_k^+))$.

$$\frac{\partial (\text{trace}(P_k^+))}{\partial K_k} = -2P_k^- C_k^T + 2K_k C_k P_k^- C_k^T + 2K_k R_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial A} (\text{trace}(ABA^T)) = 2AB, \text{ avec } B \text{ symétrique} \\ \frac{\partial}{\partial A} (\text{trace}(AC)) = C^T \\ \frac{\partial}{\partial A} (\text{trace}(C^T A^T)) = C \end{array} \right.$$

On veut : $\frac{\partial (\text{trace}(P_k^+))}{\partial K_k} = 0 \rightarrow K_k (R_k + C_k P_k^- C_k^T) = P_k^- C_k^T \Leftrightarrow K_k R_k = P_k^- C_k^T - C_k P_k^- C_k^T$

d'où : $K_k = P_k^- C_k^T (R_k + C_k P_k^- C_k^T)^{-1}$, en reportant $K_k R_k = P_k^- C_k^T - C_k P_k^- C_k^T$

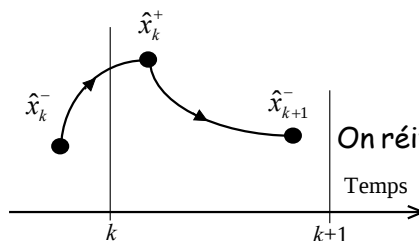
dans (*), il vient : $P_k^+ = P_k^- - P_k^- C_k^T K_k^T - K_k C_k P_k^- + K_k C_k P_k^- C_k^T K_k^T + (P_k^- C_k^T - C_k P_k^- C_k^T) K_k^T$

d'où : $P_k^+ = P_k^- - K_k C_k P_k^-$, soit : $P_k^+ = (I - K_k C_k) P_k^-$

Phase d'estimation a priori

On veut réaliser une estimation a priori $\hat{x}_{k+1}^-$ à partir de l'estimation

a posteriori $\hat{x}_k^+$, pour cela, on utilise le modèle du système : $\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k$

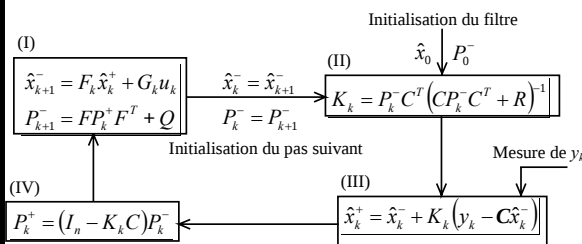


On réitère les calculs $\Rightarrow$ il faut calculer : P_{k+1}^-

Matrice de variance covariance de l'erreur d'estimation a priori P_{k+1}^-

$$\begin{aligned}
 P_{k+1}^- &= E[\tilde{x}_{k+1}^-(\tilde{x}_{k+1}^-)^T] \\
 \tilde{x}_{k+1}^- &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- = F_k x_k + G_k u_k + d_{x,k} - F_k \hat{x}_k^+ - G_k u_k \\
 \tilde{x}_{k+1}^- &= F_k \tilde{x}_k^+ + d_{x,k} \\
 P_{k+1}^- &= E[(F_k \tilde{x}_k^+ + d_{x,k})(F_k \tilde{x}_k^+ + d_{x,k})^T] \\
 P_{k+1}^- &= F_k \underbrace{E[\tilde{x}_k^+ (\tilde{x}_k^+)^T]}_{P_k^+} F_k^T + F_k \underbrace{E[\tilde{x}_k^+ d_{x,k}^T]}_{=0} + \underbrace{E[d_{x,k} (\tilde{x}_k^+)^T]}_{=0} F_k^T + \underbrace{E[d_{x,k} d_{x,k}^T]}_{Q_k} \\
 P_{k+1}^- &= F_k P_k^+ F_k^T + Q_k
 \end{aligned}$$

L'objectif du filtre de Kalman est de réaliser une estimation d'état à posteriori telle que cette estimation soit sans biais et à variance minimale



L'étape (I) réalise une estimation d'état a priori à l'instant $k+1$ (prédiction) ainsi que l'estimation de la matrice de variance covariance de l'erreur d'estimation a priori à l'instant $k+1$.

L'étape (II) réalise le calcul du gain d'adaptation K_k du filtre.

L'étape (III) réalise à partir d'une mesure de y_k une estimation optimale d'état à l'instant k (estimation a posteriori).

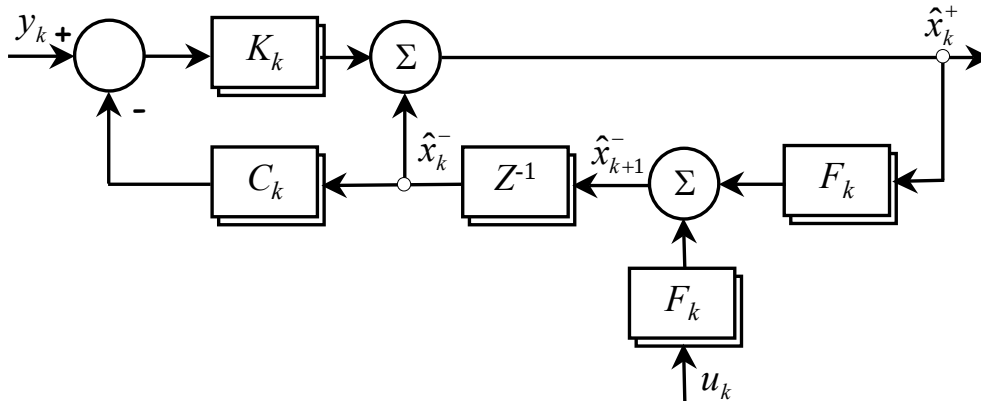
Enfin l'étape (IV) réalise l'estimation a posteriori de la covariance de l'erreur d'estimation à l'instant k .

Initialisation des calculs

$$\hat{x}_0^- = 0 \quad P_0^- = \sigma^2 I_n$$

avec pour σ^2 une valeur importante traduisant notre ignorance concernant les conditions initiales.

On a les relations :
$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k \\ \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k^-) \end{cases}$$



Si le système est stationnaire, les matrices F, G, C, Q, R sont constantes, on peut alors calculer la matrice K une fois pour toute.

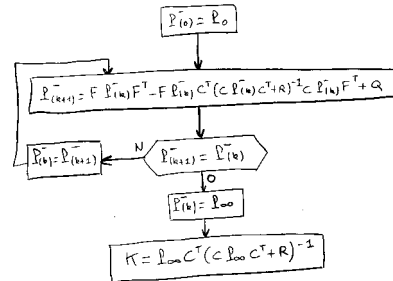
Théorème : Si (F, C) est une paire observable, le filtre de Kalman est asymptotiquement stable quelque soient les matrices Q et R définies positives et quelque soit l'initialisation P_0 . La matrice de variance covariance de l'erreur tend alors vers l'unique solution définie positive de l'équation de Riccati.

On a :
$$\begin{cases} P_{k+1}^- = F P_k^+ F^T + Q \\ P_k^+ = P_k^- - P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} C P_k^- \end{cases}, \text{ avec : } P^-(0) = P_0^-$$

d'où l'équation de Riccati :

$$P_{k+1}^- = F P_k^- F^T - F P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} C P_k^- F^T + Q$$

d'on cherche la solution stationnaire (i.e. régime permanent),
c'est-à-dire telle que : $P_{k+1}^- = P_k^-$



```

function K=kalk(F,C,Q,R)
% K=kalk(F,C,Q,R);
% Calcul le gain optimal en régime permanent du filtre de Kalman dans le cas
% des systèmes discrets stationnaires de la forme :
% x(k+1)=F.x(k)+G.u(k)+W
% y(k)=C.x(k)+V
%
% Q=E(W.W'); R=E(V.V');
%
% Recherche de la matrice de covariances de l'erreur d'estimation a priori en
% régime permanent solution de l'équation de Riccati :
%
% P(k+1)=F.P(k).F'-F.P(k).C'.(C.P(k).C'+R).C.P(k).F'+Q
%
P0=diag(10*ones(length(F),1),0);
P1=F*P0*F'-F*P0*C'*inv(C*P0*C'+R)*C*P0*F'+Q;
e=1e-10*ones(length(F));
while abs(P1-P0)>e
    P0=P1;
    P1=F*P0*F'-F*P0*C'*inv(C*P0*C'+R)*C*P0*F'+Q;
end
P0
K=P0*C'*inv(C*P0*C'+R);
  
```

Application à la détection de défauts capteurs MCC

$$F = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.01 \\ 0.02 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul du filtre de Kalman

L'équation générale du filtre s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F\hat{x}_k^+ + Gu_k \\ \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K(y_k - C\hat{x}_k^-) \\ \hat{y}_k^- = C\hat{x}_k^- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F(I - KC)\hat{x}_k^- + [G \quad FK] \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix} \\ \hat{y}_k^- = C\hat{x}_k^- \end{cases}$$

Avec : $K = P_{\infty} C^T (C P_{\infty} C^T + R)^{-1}$, et P_{∞} est la solution de l'équation de Riccati :

$$P_{k+1}^- = F P_k^- F^T - F P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} C P_k^- F^T + Q$$

Pb : choix des matrices Q et R ?

Choix des matrices Q et R

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = F\hat{x}_k^+ + Gu_k & \leftarrow \text{Phase de pr\u00e9diction} \\ \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K(y_k - C\hat{x}_k^-) \\ \hat{y}_k^- = C\hat{x}_k^- & \uparrow \text{Mesure} \end{cases}$$

Les matrices Q et R permettent d'ajuster l'importance accord\u00e9e \u00e0 la phase de pr\u00e9diction ou \u00e0 la mesure

Q tr\u00e8s faible $\Rightarrow$ on accorde beaucoup d'importance \u00e0 la phase de pr\u00e9diction, le mod\u00e8le est jug\u00e9 bon.

Q grand $\Rightarrow$ on accorde peu d'importance \u00e0 la phase de pr\u00e9diction, le mod\u00e8le est jug\u00e9 approximatif.

R tr\u00e8s faible $\Rightarrow$ on accorde beaucoup d'importance \u00e0 la mesure. La cha\u00eene de mesure est jug\u00e9e tr\u00e8s fiable.

R grand $\Rightarrow$ on accorde peu d'importance \u00e0 la mesure. La cha\u00eene de mesure est jug\u00e9e peu fiable.

On accorde beaucoup d'importance \u00e0 la pr\u00e9diction et non \u00e0 la mesure

$$Q = 10^{-4}I, \quad R = I$$

$$P_{\infty} = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0002 \\ -0.0002 & 0.0038 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.0005 & -0.0002 \\ -0.0002 & 0.0038 \end{bmatrix}$$

$$F(I - KC) = \begin{bmatrix} 0.8995 & -0.0097 \\ 0.0202 & 0.9862 \end{bmatrix}, \quad (G - FK) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0005 & -0.0003 \\ 0 & -0.0002 & 0.0038 \end{bmatrix}$$

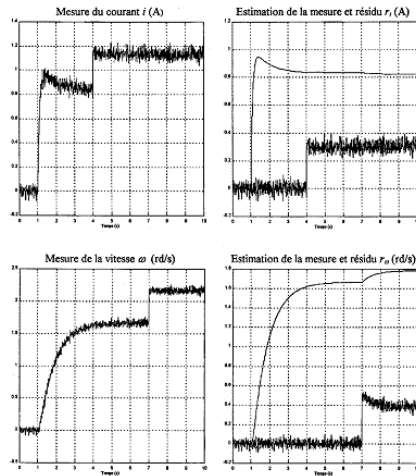
On accorde beaucoup d'importance \u00e0 la mesure et non \u00e0 la pr\u00e9diction

$$Q = I, \quad R = 10^{-4}I$$

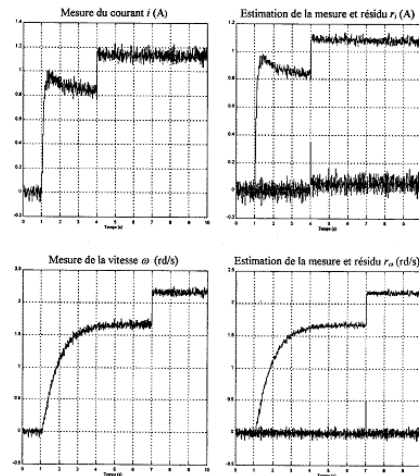
$$P_{\infty} = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0 \\ 0 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 \\ 0 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$F(I - KC) = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.8998 & -0.01 \\ 0.02 & 0.9898 \end{bmatrix}, \quad (G - FK) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8999 & -0.01 \\ 0 & 0.02 & 0.9899 \end{bmatrix}$$

Filtre de Kalman avec $Q = 10^{-4}I$ et $R = I$

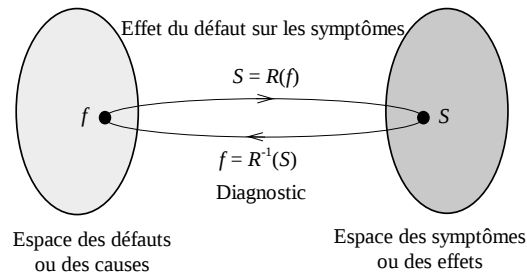


Filtre de Kalman avec $Q = I$ et $R = 10^{-4}I$



6. Diagnostic qualitatif

Fondamentalement, le diagnostic consiste en la résolution d'un problème inverse du type
cause → effet



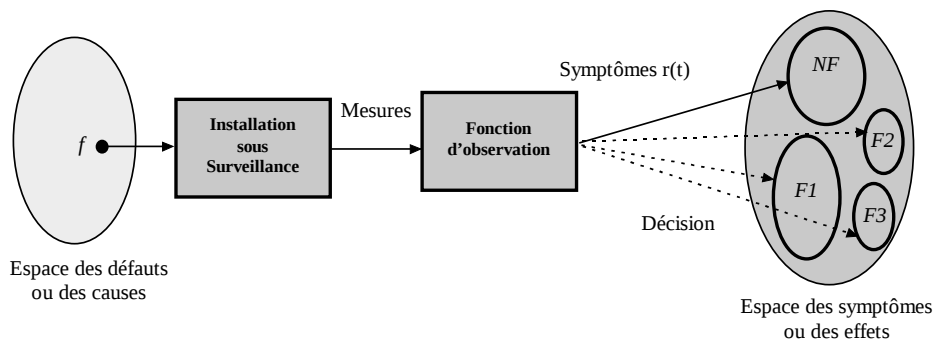
Il s'agit de remonter des effets constatés, que nous appellerons les symptômes observables, au défaut, c'est-à-dire à l'élément défaillant

Pour la résolution de ce problème inverse on peut distinguer deux cas :

1. On sait déterminer analytiquement la relation existante entre la cause et son effet observable par ses symptômes (approche quantitative).
2. On ne sait pas déterminer une telle relation (approche qualitative).

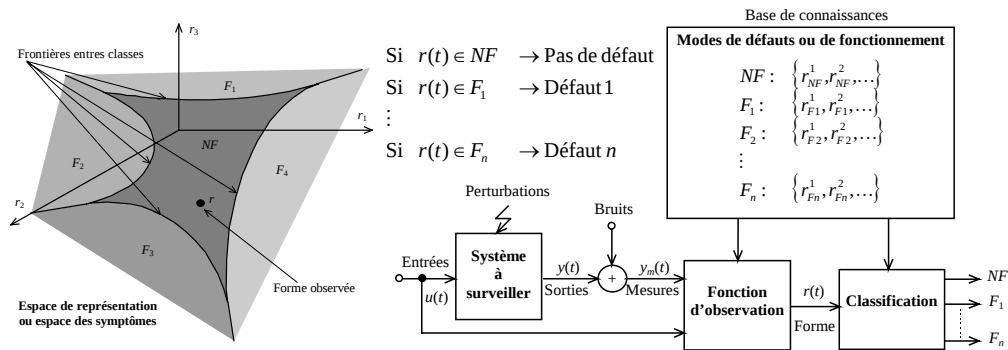
6. Diagnostic qualitatif

Suivant l'approche qualitative, l'objectif va être d'évaluer l'appartenance du vecteur des symptômes observés, à un ensemble de référence que l'on sait représentatif d'un mode de fonctionnement donné de l'installation (ou mode de défaut).



6. Diagnostic qualitatif

Il s'agit d'affecter l'observation $r(t)$ au domaine de l'espace de représentation correspondant au mode de fonctionnement de l'installation



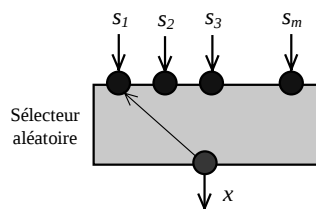
C'est un problème de reconnaissance des formes

- Approche probabiliste
- Approche floue
- Approche neuronale

6. Diagnostic qualitatif

Approche probabiliste

Exemple introductif, le sélecteur aléatoire



On considère m sources de variables aléatoires dont on connaît les lois de densité de probabilité.

On note $p(x/S_i)$ la loi de densité de probabilité de la variable délivrée par la source S_i .

Le sélecteur aléatoire permet de sélectionner l'une des sources au gré du hasard

Lorsqu'une source est sélectionnée, on réalise une observation $x(t)$.
Problème : déterminer à partir de l'observation $x(t)$ la source sélectionnée

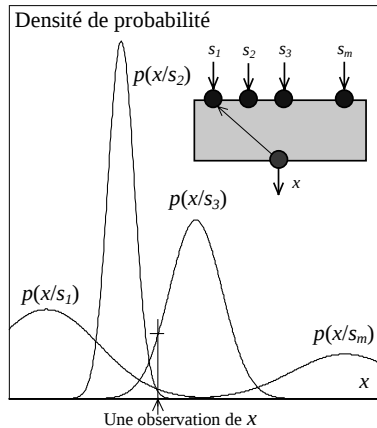
Deux cas :

- Sélection équiprobable des sources
- Sélection non équiprobable des sources

6. Diagnostic qualitatif

Approche probabiliste

Sélection équiprobable des sources



La source sélectionnée correspond au plus grand des $p(x/s_i)$.
La source S_i sélectionnée est telle que :

$$p(x/s_i) = \max_{j=1..m} p(x/s_j)$$

Soit $P(S_i/x)$ la probabilité pour que la source S_i soit sélectionnée, l'observation x étant réalisée, on a :

$$\sum_{i=1}^m P(S_i/x) = 1 = \frac{\sum_{i=1}^m p(x/s_i)}{\sum_{j=1}^m p(x/s_j)} = \sum_{i=1}^m \frac{p(x/s_i)}{\sum_{j=1}^m p(x/s_j)}$$

On a donc :

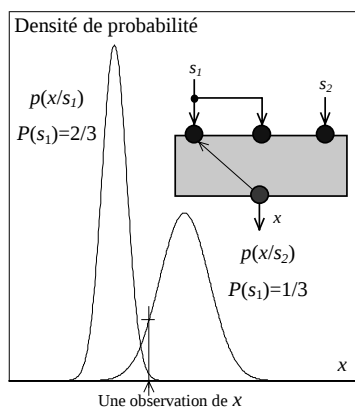
$$P(S_i/x) = \frac{p(x/s_i)}{\sum_{j=1}^m p(x/s_j)}$$

Cette relation permet de calculer la probabilité pour que la source S_i soit sélectionnée l'observation x étant réalisée. La source sélectionnée correspond à la plus grande des probabilités

6. Diagnostic qualitatif

Approche probabiliste

Sélection non équiprobable des sources



Considérons deux sources S_1 et S_2 avec S_1 ayant deux fois plus de chance d'être sélectionnée que S_2 .

⇔ Trois sources équiprobables dont deux identiques à S_1

La source S_1 a 2 chances sur 3 d'être sélectionnée
La source S_2 a 1 chance sur 3 d'être sélectionnée

$P(S_1)$ et $P(S_2)$ sont les probabilités a priori d'occurrence des sources.

Une mesure x étant réalisée, la source sélectionnée correspond au plus grand des deux nombres : $P(S_1)p(x/s_1)$ à $P(S_2)p(x/s_2)$

Pour m sources, on a alors la règle de décision suivante :

$$P(S_i)p(x/s_i) = \max_{j=1..m} P(S_j)p(x/s_j)$$

La probabilité d'occurrence de la source S_i l'observation x étant réalisée s'écrit alors :

$$P(S_i/x) = \frac{P(S_i)p(x/s_i)}{\sum_{j=1}^m P(S_j)p(x/s_j)}$$

C'est la formule de Bayes. Elle permet de calculer les probabilités a posteriori d'occurrence des sources, c'est à dire une fois l'observation réalisée.

6. Diagnostic qualitatif

Approche probabiliste : classification bayésienne optimale

L'exemple du sélecteur aléatoire n'est autre qu'un problème de classification.

Soit $r(t)$ le vecteur des observations et considérons m modes de fonctionnement ou classes $C_1, C_2, \dots, C_m$.

Soit $p(r/C_i)$ la loi de densité de probabilité de la variable r correspondant à la classe C_i .

Soit $P(C_i)$ la probabilité a priori d'occurrence de la classe C_i .

La probabilité d'occurrence de la classe C_i une observation r étant réalisée (probabilité a posteriori) s'écrit :

$$P(C_i / r) = \frac{P(C_i) p(r / C_i)}{\sum_{j=1}^m P(C_j) p(r / C_j)}, \quad i = 1 \dots m$$

L'observation r est alors affectée à la classe C_i fournissant la plus grande probabilité a posteriori :

$$r \in C_i : P(C_i / r) = \max_{j=1 \dots m} P(C_j / r)$$

La probabilité d'une mauvaise classification s'écrit : $1 - \max_{j=1 \dots m} P(C_j / r)$

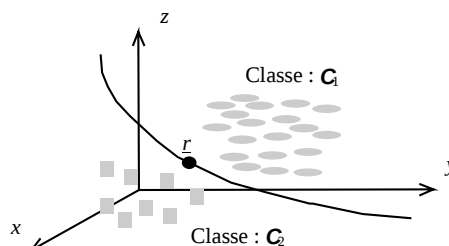
Elle est minimale, cette approche est donc optimale au sens d'une erreur de classification minimale

6. Diagnostic qualitatif

Notion de rejet en classification

On distingue deux types de rejet : le rejet d'ambiguïté et le rejet en distance.

Le rejet d'ambiguïté se produit lorsqu'une observation se trouve sur la frontière séparant plusieurs classes ou un domaine commun à celles-ci.



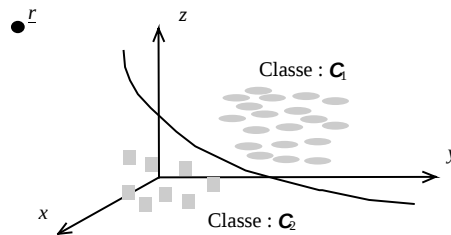
Décider dans ces conditions de l'appartenance de l'observation à l'une des classes plutôt qu'à l'autre constitue un risque d'erreur important. Soit R_a le seuil de rejet par ambiguïté, la règle de rejet s'écrit :

$$\text{Si } e_{\text{class}} = 1 - \max_{j=1 \dots l} P(C_j / x) > R_a \text{ alors l'observation est rejetée par ambiguïté}$$

6. Diagnostic qualitatif

Notion de rejet en classification

Le rejet en distance se produit lorsqu'une observation se trouve dans une zone éloignée de toutes les classes connues.



Cette situation peut signifier l'apparition d'un nouveau mode de fonctionnement pour lequel on ne dispose d'aucune information dans la base d'apprentissage. Soit R_d le seuil de rejet en distance, la règle de rejet s'écrit :

$$\text{Si } \max_{j=1..l} P(C_j / x) < R_d \text{ alors l'observation est rejetée en distance}$$

6. Diagnostic qualitatif

Paramétrage des classes - Le cas gaussien

Dans les applications réelles, les lois de densité de probabilité des classes ne sont pas connues.

En pratique, l'hypothèse gaussienne est souvent adoptée. Chaque classe est modélisée par une loi de densité de probabilité gaussienne de dimension q (dimension de x) :

$$p(x / C_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q \det(\Sigma_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m_i)^T \Sigma_i^{-1} (x - m_i)\right)$$

avec m_i la moyenne de la classe C_i et Σ_i sa matrice de variance covariance. Ces deux paramètres peuvent être calculés à l'aide des estimateurs suivants :

$$\hat{m}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_j, \quad \hat{\Sigma}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (x_j - m_i)(x_j - m_i)^T$$

Les probabilités a priori, d'occurrences des classes $P(C_i)$, sont estimées à l'aide de la relation :

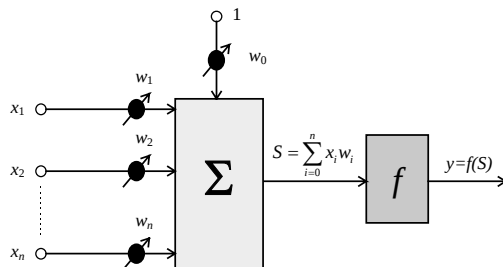
$$\hat{P}_i = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^l N_j}$$

où N_i représente l'effectif de la classe C_i et l le nombre de classes connues.

6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : le neurone formel

Un neurone formel est une fonction non linéaire de la somme pondérée de ses entrées:



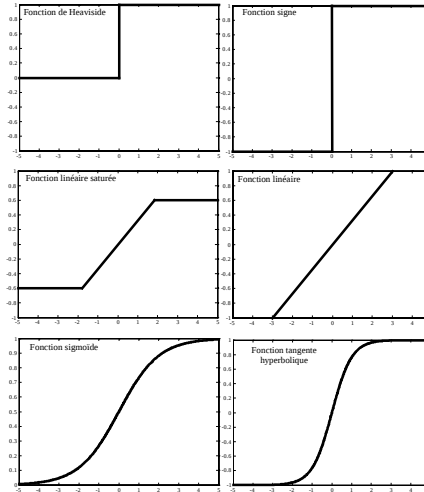
$$S = \sum_{i=0}^n x_i w_i = \underline{X}^T \underline{W}, \quad y = f(S)$$

$$\underline{X}^T = [1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

$$\underline{W}^T = [w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$$

Les coefficients de pondération w_i , ou poids, sont les paramètres ajustables du neurone

Principales fonctions d'activation f



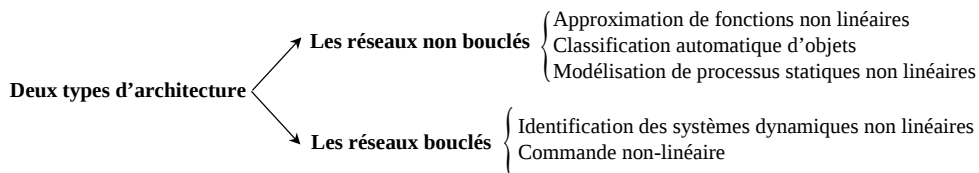
L'interconnexion de plusieurs neurones formels réalise un réseau de neurones

6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : Caractéristiques générales des réseaux de neurones

Un réseau de neurones réalise une fonction non linéaire de ses entrées par composition des fonctions réalisées par chacun de ses neurones.

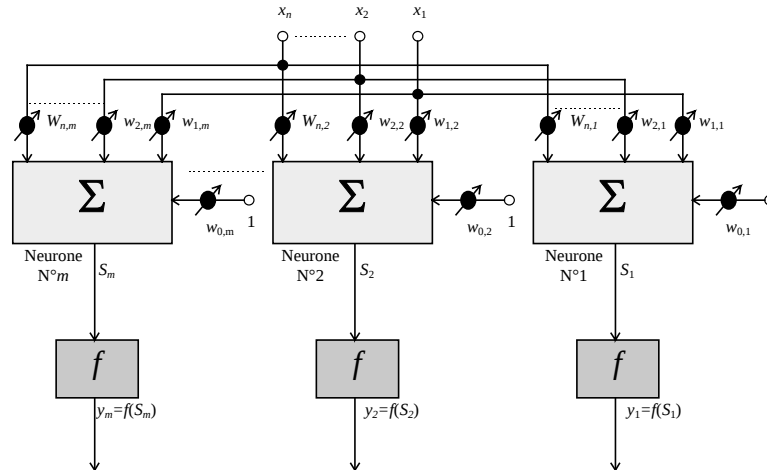
Les réseaux de neurones sont des approximateurs universels parcimonieux.



6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : Les réseaux de neurones non bouclés ou statiques

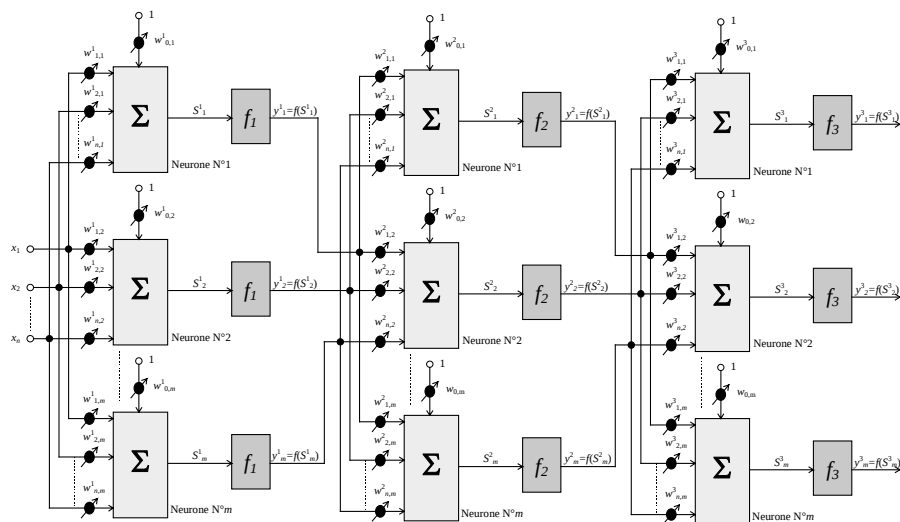
Réseau non bouclé monocouche (perceptron monocouche) : $\underline{y}(k) = h(\underline{x}(k), W)$



6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : Les réseaux de neurones non bouclés ou statiques

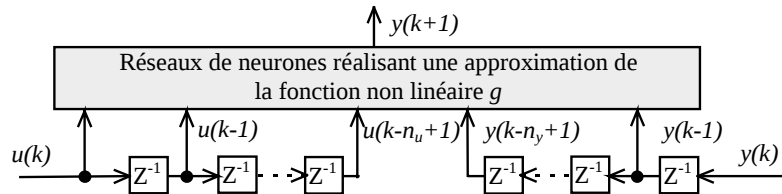
Réseau non bouclé multicouche (perceptron multicouche) : $\underline{y}(k) = h(\underline{x}(k), W)$



6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : Les réseaux de neurones bouclés ou dynamiques

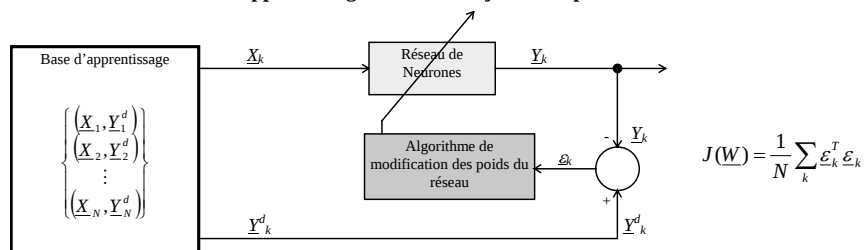
$$y(k+1) = g(y(k), \dots, y(k-n_y+1), u(k), \dots, u(k-n_u+1))$$



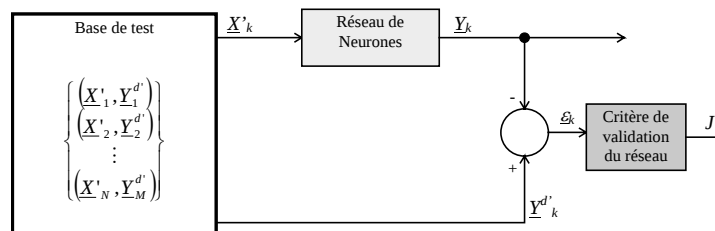
6. Diagnostic qualitatif

Approche neuronale : Apprentissage des réseaux de neurones

Phase d'apprentissage : Permet d'ajuster les poids du réseau



Phase de test : Permet d'évaluer les capacités de généralisation du réseau



6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Motivations initiales

Constataction

Des opérateurs résolvent des problèmes complexes de manière relativement simple, sans avoir le besoin ou la possibilité de **modéliser** le système.

(On peut parfaitement conduire un véhicule sans en connaître le modèle mathématique...)

Conclusion

Il vaut mieux alors modéliser le **comportement de l'opérateur** plutôt que le système :

- en tirant partie d'un **savoir faire** existant.
- en dépassant les **limites de la logique booléenne**.

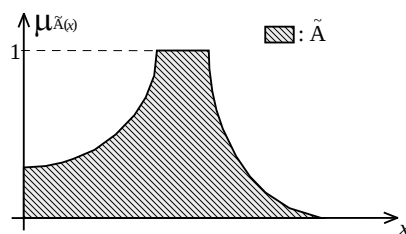
Une nouvelle approche est donc nécessaire : La logique floue (Fuzzy logic)

6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Notion de sous-ensemble flou

Étant donné un ensemble E , un sous-ensemble flou $\tilde{A}$ de E est défini par une fonction caractéristique d'appartenance (ou fonction d'appartenance) notée : $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : E \rightarrow [0,1]$$



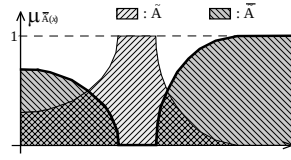
6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Opérations simples sur les sous-ensembles flous

Complémentaire

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

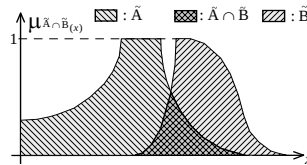
Le complémentaire est un opérateur de négation



Intersection

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

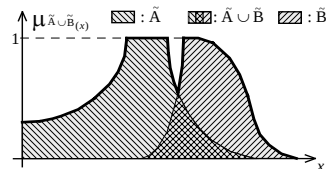
Le min est un opérateur de conjonction noté $\top$



Réunion

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

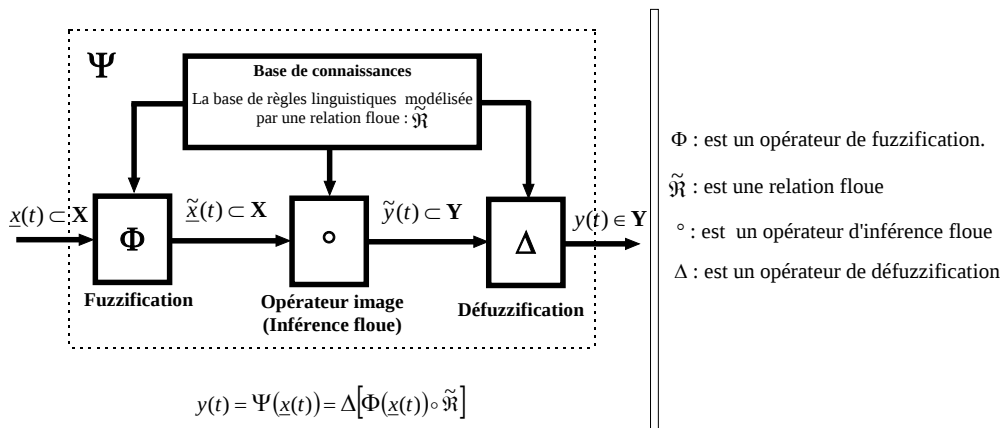
Le max est un opérateur de disjonction noté $\perp$



6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Système d'inférence floue

Un système d'inférence floue (SIF) réalise une fonction non linéaire Ψ d'une partie X de l'espace d'entrée vers une partie Y de l'espace de sortie



Les SIF sont des approximateurs universels

6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Les opérateurs d'un SIF, la base de règles linguistiques

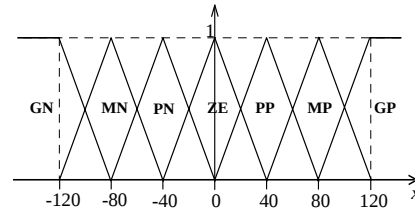
Un SIF est caractérisé par un ensemble de règles linguistiques permettant de représenter des connaissances qualitatives

Ces règles sont des fonctions de variables linguistiques notées : $(X, T(X), X)$

X : le référentiel

X : le nom de la grandeur observée (température, vitesse...)

$T(X)$: l'ensemble des termes linguistiques permettant de caractériser X



Les termes linguistiques sont représentés à l'aide de SEF du référentiel X

(Position, T(position) = {GN,MN,PN,ZE,PP,MP,GP}, [-120, 120])

Soient les variables linguistiques $(X_i, T(X_i), X_i)_{i=1...n_X}$ et $(Y, T(Y), Y)$, une base de règles linguistiques est une liste de propositions conditionnelles floues de la forme :

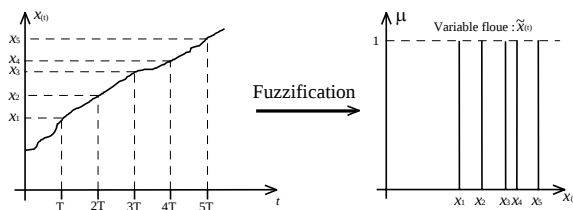
R_k : Si $(X_1 \text{ est } \tilde{A}_k^1)$ et $(X_2 \text{ est } \tilde{A}_k^2)$ et ... et $(X_{n_X} \text{ est } \tilde{A}_k^{n_X})$ Alors $Y \text{ est } \tilde{B}_k$ avec $k = 1...l$

6. Diagnostic qualitatif

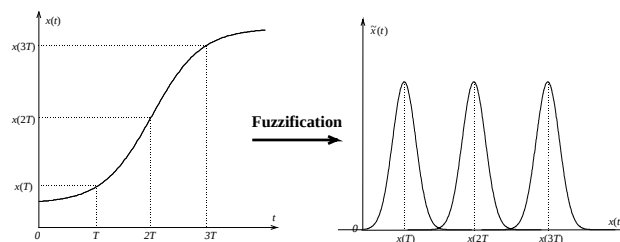
Approche floue : Les opérateurs d'un SIF, l'opérateur de fuzzification

Il permet d'associer à une évaluation numérique de la grandeur observée un sous-ensemble flou

Exemple : Fuzzification par singleton



Exemple : Fuzzification gaussienne



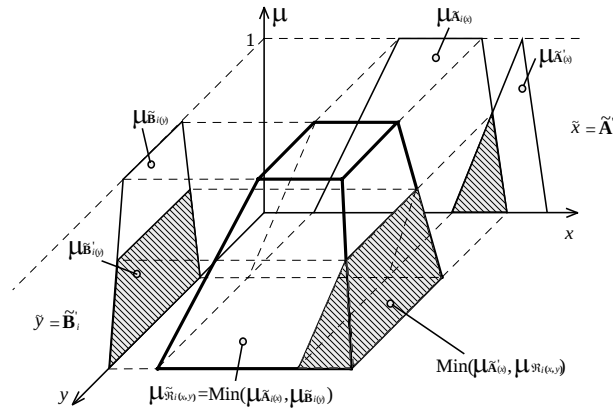
6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Les opérateurs d'un SIF, l'opérateur d'inférence floue

Fait : X est $\tilde{A}'$ (résultat de la fuzzification donc $\tilde{A}'$ est connu)

Règles : R_i : Si X est $\tilde{A}_i$ Alors Y est $\tilde{B}_i$ (connu)
$$\mu_{\tilde{B}_i}(y) = \sup_x \left[\min \left(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \min \left(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_{\tilde{B}_i}(y) \right) \right) \right]$$

Conclusion : X est $\tilde{B}_i$ (résultat de l'inférence floue à calculer, $\tilde{B}_i$ est inconnu)

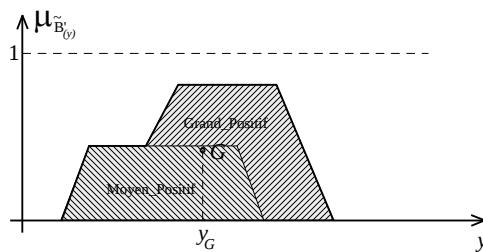


6. Diagnostic qualitatif

Approche floue : Les opérateurs d'un SIF, l'opérateur de défuzzification

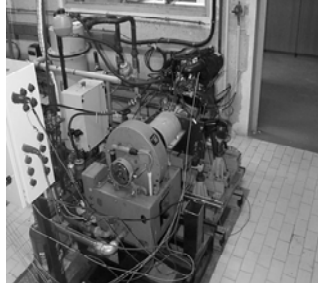
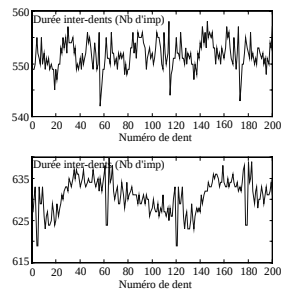
Il permet de transformer le résultat de l'inférence floue en une valeur numérique

Exemple : Défuzzification par centre de gravité



Exemple de mise en oeuvre d'un système de diagnostic pour la détection de défauts d'allumage d'un moteur thermique

Données brutes sur une fenêtre de 200 pts à 4000tr/min



Données traitées sur une fenêtre de 200 pts à 4000tr/min

