Commande par calculateur Introduction à la représentation d'état

SOMMAIRE

Chapitre I CONDUITE DE PROCESSUS PAR CALCULATEUR

1. Principe de commande

- 1.1. Schéma de principe
- 1.2. Echantillonnage, quantification et extrapolation (d'ordre 0)
- 1.3. Schémas fonctionnels

2. Aspects matériels

- 2.1. Convertisseur numérique analogique
- 2.2. Convertisseur analogique numérique
- 2.3. Interruptions matérielles

3. Aspects logiciels

- 3.1. Organigrammes
- 3.2. Déroulement des interruptions
- 3.3. Chronogramme d'interruption

4. Synthèse approchée des systèmes commandés par calculateur

Chapitre II

ETUDE THEORIQUE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES

1. Echantillonnage idéal

- 1.1. Définition
- 1.2. Représentation mathématique
- 1.3. Transformée de Laplace échantillonnée (ou pulsée)
- 1.4. Applications

2. Systèmes linéaires pulsés

- 2.1. Schéma de base
- 2.2. Exemple : le système à mémoire
- 2.3. Valeur de la sortie aux seuls instants d'échantillonnage
- 2.4. Cas de plusieurs transmittances

3. Transformées en z

- 3.1. Définition
- 3.2. Propriétés
- 3.3. Exemples
- 3.4. Transformée en z modifiée

4. Stabilité

5. Spectre d'un signal échantillonné

- 5.1. Interprétation graphique
- 5.2. Reconstitution du signal (i.e. filtrage après échantillonnage)
- 5.3. Choix de la période d'échantillonnage
- 5.4. Filtrage avant échantillonnage (filtrage de la mesure)



Chapitre III REPRESENTATION D'ETAT

- 1. Notion d'état
- 2. Définition de l'état d'un système
- 3. Non unicité de la représentation d'état
- 4. Obtention de la matrice de transfert à partir de la représentation d'état
 - 4.1. Unicité de la représentation par matrice de transfert
 - 4.2. Valeurs propres de la matrice d'état, pôles et zéros de la matrice de transfert

5. Obtention d'une représentation d'état à partir de la fonction de transfert

- 5.1. Forme canonique commandable
- 5.2. Forme canonique observable
- 5.3. Forme canonique modale

6. Solution de l'équation d'état :

- 6.1. Cas d'une seule variable d'état
- 6.2. Cas multivariable
- 6.3. Propriétés de la matrice de transition

7. Stabilité, gouvernabilité et observabilité d'un système

- 7.1. Stabilité d'un système linéaire invariant
- 7.2. Gouvernabilité
- 7.3. Observabilité

8. Représentation en temps discret des systèmes à temps continu

- 8.1. Discrétisation approchée
- 8.2. Discrétisation approchée de l'équation d'état
- 8.3. Discrétisation exacte de l'équation d'état

Chapitre 1

CONDUITE DE PROCESSUS PAR CALCULATEUR

1- Principe de commande :

La commande de processus par calculateur se généralise grâce à l'évolution des microprocesseurs.

Le calculateur est utilisé dans une boucle d'asservissement pour remplacer le régulateur analogique. Le calculateur est plus souple d'emploi ; les paramètres de réglage et la structure de la loi de commande sont modifiés par programmation plutôt que par modification du câblage avec un régulateur analogique. Mais surtout il est possible d'élaborer des lois de commandes optimales non linéaires pour mieux utiliser les possibilités technologiques du processus réel à asservir.

Dans la configuration la plus simple d'un asservissement mono variable, le calculateur assure les fonctions du comparateur et du régulateur.



Mais le calculateur est encore plus performant dans le cas de processus complexe où la connaissance de plusieurs grandeurs représentatives est nécessaire.



Dans le cas d'une conduite optimale, on peut introduire dans le programme des critères de performance pour permettre, par exemple :

- une réponse en temps minimal ;
- une réponse minimisant l'intégrale du carré de l'erreur : $J = \int \varepsilon^2 dt$;
- un fonctionnement minimisant une consommation d'énergie ;
- la liaison avec un ensemble superviseur ;
- la surveillance des défauts...

1-1- Schéma de principe :

a- système mono variable :

Dans la boucle d'asservissement, il faut placer des interfaces avec le calculateur numérique : une carte de conversion numérique analogique (CNA) en sortie du calculateur et une carte de conversion analogique numérique (CAN) en entrée du calculateur.



En général, le CNA travaille avec des mots de 12 bits (1,5 octet) et le CAN avec des mots de 12 bits (1,5 octet).

La carte CAN nécessite un échantillonneur et un bloqueur associés ; le blocage est réalisé par un condensateur.



Le condensateur doit être de bonne qualité et permettre un bon maintien de la tension y(t) pendant toute la durée de la conversion ; il assure la fonction bloqueur pendant la durée t_1 seulement. Ensuite, la valeur est mémorisée dans le calculateur. Ce bloqueur est interne au CAN et ne figure pas dans le schéma fonctionnel de l'asservissement.



La carte CNA comporte un registre pour mémoriser la grandeur numérique U(nT), puis un convertisseur numérique analogique donnant la grandeur de sortie analogique U(t), et la garde aussi longtemps que le registre ne change pas de contenu. Le registre assure donc la fonction de blocage pendant la durée de la période d'échantillonnage. Ce bloqueur doit être pris en compte dans le schéma fonctionnel de l'asservissement.



b-Système multi variables :



Le calculateur est relié aux entrées et sorties par des cartes CNA et CAN connectées sur son bus, avec un nombre de voies d'au moins six par carte.

Une carte CNA comporte un convertisseur par voie de sortie. Elle possède sa propre logique de commande pour pouvoir sélectionner une sortie par le calculateur

Une carte CAN ne comporte qu'un seul convertisseur associé à un bloqueur, un échantillonneur et le multiplexeur, ceci pour 8 ou 16 voies d'acquisition.



1-2- Echantillonnage, quantification et extrapolation (d'ordre 0) :

La valeur y(t) évolue de manière continue en fonction du temps. A chaque échantillonnage on obtient une valeur échantillonnée (échantillonnage idéal). Le convertisseur donne une valeur quantifiée liée à la précision du CAN puis la valeur est mémorisée entre deux instants d'échantillonnage (valeur extrapolée par bloqueur ou extrapolateur d'ordre 0).Dans certains cas exceptionnels, on utilise des extrapolateurs d'ordre supérieur. 1-3- Schémas fonctionnels :



Dans ce schéma, on retrouve l'échantillonneur et le bloqueur sur la loi de commande U(t) du système continu. Le but du bloqueur est de maintenir une commande entre 2 instants successifs d'échantillonnage pour piloter le système continu. Remarquons que le rôle du bloqueur est assuré par le registre du CNA qui mémorise la valeur entre les instants d'échantillonnage. Le maintien de U(t) est nécessaire pour que le système continu soit piloté, d'où la présence obligatoire du bloqueur sur le schéma.

Pour l'acquisition du signal y(t), le bloqueur physiquement indispensable n'est pas utile pour la représentation avec le schéma fonctionnel car le calculateur n'utilise que la valeur y(n).

Autre schéma simplifié :



Schéma avec la transformée en z :



2- Aspects matériels :

2-1- Convertisseur numérique analogique :

Un des principes utilisés est le convertisseur à entrées pondérées. Les mots convertis sont en général de 12 bits. Le temps de conversion est de 2 à 40 micro secondes selon les matériels. Principe de réalisation : conversion d'un mot de 4 bits.



Pour un CNA de 12 bits la précision est de $(1 / 2^{12})$ Ur = 2,44.10⁻⁴.Ur.

2-2- Convertisseur analogique numérique :

Il existe de nombreux principes de réalisation : dent de scie, pondération, double pente, tension fréquence....

Les mots convertis sont en général de 12 bits ou 16 bits.

La fréquence d'échantillonnage est aux environs de 0,1 à 40 msec.

Principe de fonctionnement :



Un ordre de conversion arrive. La valeur à convertir y(n) est mémorisée à l'entrée pendant le temps de conversion.

La logique d'évolution numérique envoie des valeurs numériques successives sur le CAN. La variable y convertie est comparée à y(n). Tant que les deux valeurs ne sont pas égales le bloc non linéaire délivre la valeur 0 ; si les valeurs sont égales (dans l'intervalle de précision du CAN), la valeur 1 apparaît, un ordre de fin de conversion est émis et la donnée numérique convertie est disponible sur le bus de données du calculateur. La logique d'évolution partant du bit de poids le plus élevé vers le bit de poids le plus faible correspond au convertisseur à pondération.

2-3- Interruptions matérielles :



L'entrée \overline{IRQ} commande les interruptions au niveau du microprocesseur (μp).

Cette interruption peut être générée soit par :

 une entrée d'horloge extérieure sur un VIA ou un PIA,

- un compteur décompteur interne au VIA programmé dans un mode répétitif ajustable.

3- Aspects logiciels :

3-1- Organigrammes :

Considérons un calculateur numérique connecté à un processus à asservir. Le calculateur possède un programme principal qui gère différentes tâches : gestion d'un écran, d'un clavier, d'une imprimante, etc.. Ces tâches sont scrutées en permanence par le calculateur.

Le programme de commande du système est exécuté sous interruption cadencée (échantillonnage).



3-2- Déroulement des interruptions :

La procédure des interruptions se déroule de la manière suivante :

- \rightarrow interruption matérielle liée à la période d'échantillonnage,
- \rightarrow arrêt du programme en cours (tâche courante),
- → sauvegarde du compteur de programme, des registres de données et d'adresses du microprocesseur dans une pile,



- \rightarrow chargement du vecteur d'interruption dans le compteur de programme,
- \rightarrow redémarrage du microprocesseur,
- \rightarrow exécution du programme de commande,
- → retour du programme d'interruption avec restitution des registres sauvegardés dans la pile en terminant par le compteur de programme,
- \rightarrow redémarrage du microprocesseur d'où la reprise du programme en cours.

3-3- Chronogramme d'interruption :

La figure ci-dessous montre le déroulement du programme d'interruption :



 $t_0 = t_1 + t_2 + t_3 =$ temps de réponse du calculateur

Regardons dans le temps l'acquisition de y(n) et l'affectation de U(n) :



La prise en compte de y(n) ne coïncide pas avec l'apparition de U(n); il y a un décalage lié au temps de réponse du calculateur (t₀). Donc les échantillonneurs d'entrée et de sortie ne battent pas en même temps dans la structure de commande par calculateur.

Le temps de travail du calculateur est partagé entre deux activités : pendant le temps t_0 suivi du système continu et pendant le temps $(T-t_0)$ exécution des tâches du programme principal.

En général, le temps de réponse du calculateur (t_0) est très petit devant la période d'échantillonnage (T). Dans la suite du cours, nous considérerons que les échantillonneurs sont synchrones.

4- Synthèse approchée des systèmes commandés par calculateur :

Soit un modèle de système :

Regardons l'allure de la commande U(t) :

La courbe f(t) représente la fonction U(t) liée à une commande continue. La fonction en escalier est la commande de U(t) liée au bloqueur. On peut donc tracer une fonction f [t-(T/2)] qui est la grandeur filtrée de la commande de U(t) bloquée.

Donc l'ensemble "échantillonneur + bloqueur" peut être assimilé à un retard pur égal à T/2.

Le schéma du système commandé par calculateur devient un schéma continu.

La synthèse alors se réalise par des méthodes classiques :

 \rightarrow méthode harmonique,

$$\rightarrow$$
 méthode temporelle avec l'approximation de Padé $\left(e^{-\tau.p} \approx \frac{1-(\tau/2).p}{1+(\tau/2).p}\right)$

Une fois le correcteur dimensionné, il suffit alors de le discrétiser pour obtenir ses équations récurrentes.

Chapitre 2

ETUDE THEORIQUE

DES SYSTEMES ECHANTILLONNES

1- Echantillonnage idéal :

1-1- <u>Définition :</u>

L'échantillonnage d'une fonction f(t) consiste à remplacer cette fonction par une suite discontinue de ses valeurs f(nT) aux seuls instants d'échantillonnage notée f *(t).

1-2- Représentation mathématique :

Soit la fonction i(t) définie par :

$$i(t) = \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \dots + \delta(t - nT) + \dots$$
$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Cette fonction représente un train d'impulsions unitaires ou peigne de Dirac. On peut exprimer le passage de f(t) à f *(t) en modulant f(t) par le train d'impulsions.

Donc :

$$f^*(t) = f(t) i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

1-3- Transformée de Laplace échantillonnée (ou pulsée) :

Appliquons la transformée de Laplace à la fonction f *(t) :

$$f^{*}(t) \rightarrow F^{*}(p) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \,\delta(t - nT)\right)$$

d'où après calculs :

$$F^{*}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-npT}$$

Remarque : définissons l'opérateur z en posant le changement de variable $z = e^{pT}$, alors nous obtenons la transformée en z :

$$f(t) \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \mathbf{Z}[f^*(t)] = \mathbf{Z}[f^*(p)]$$

1-4- Applications :

a- Systèmes pulsés à mémoire : (cas des calculateurs numériques)

La valeur réelle de f(t) est conservée entre deux instants d'échantillonnage ; ce qui revient à mémoriser ou bloquer la valeur de la fonction.

Fictivement on divise l'opération effectuée par ce système en deux parties successives :

- échantillonnage idéal,
- mise en mémoire de la valeur par le bloqueur d'ordre 0 noté B₀.

b- modulation d'impulsion en amplitude :

La mesure f(t) à chaque instant d'échantillonnage nT est physiquement représentée par une impulsion de largeur constante hT (h << 1) et de hauteur f(nT).

Comme h \ll 1, f1(t) peut être considérée approximativement comme le produit de f*(t) par la quantité h.

c-*Modulation d'impulsion en durée* :

Au lieu de moduler les créneaux en amplitude on les module en durée : la largeur du créneau n mesure la valeur de f(nT) avec une hauteur constante.

Si la largeur maximale des créneaux est très petite par rapport à T, on schématise ce dispositif par l'association en cascade d'un échantillonneur et d'un gain.

2- Systèmes linéaires pulsés:

2-1- Schéma de base :

Soit un système linéaire pulsé constitué d'un échantillonneur et d'un système linéaire.

$$\begin{array}{c} x(t) \\ X(p) \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{c} x^*(t) \\ X^*(p) \end{array} \xrightarrow{V(t)} \begin{array}{c} y(t) \\ Y(p) \end{array}$$

On peut écrire :

$$Y(p) = H(p) X^{*}(p) = H(p) \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT) e^{-nTp}$$

2-2 Exemple : le système à mémoire.

Considérons H(p) comme étant un bloqueur d'ordre zéro :

$$\frac{x(t)}{X(p)} \xrightarrow{T} \frac{x^*(t)}{X^*(p)} \xrightarrow{B_0(p)} \frac{y(t)}{Y(p)}$$

D'où :

$$Y(p) = B_0(p) X^*(p) = B_0(p) \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT) e^{-nTp}$$

Plaçons nous entre deux instants d'échantillonnage nT et (n+1)T :

la valeur y(t) est maintenue constante par le bloqueur, donc y(t) correspond à un créneau de hauteur x(nt) pour nT $\leq t < (n+1)T$ d'où :

$$y(t) = x(nt) [U(t-nT) - U(t-(n+1)T)]$$

pour $t \ge 0$:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT) \left[U(t-nT) - U(t-(n+1)T) \right]$$

Utilisons la transformée de Laplace :

$$Y(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT) \left(\frac{1}{p} e^{-nTp} - \frac{1}{p} e^{-(n+1)Tp} \right)$$
$$Y(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT) e^{-nTp} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} X^*(p)$$

D'où la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro :

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{p}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{T}\mathbf{p}}}{\mathrm{p}}$$

2-3- Valeur de la sortie aux seuls instants d'échantillonnage :

Nous venons de voir que la sortie est donnée par $S(p) = H(p) E^*(p)$; la connaissance de s(t) à tout instant est compliquée à obtenir. Par contre, les valeurs de s(t) aux seuls instants d'échantillonnage sont faciles à connaître par une relation simple entre l'entrée échantillonnée et la sortie échantillonnée.

$$\frac{x(t)}{X(p)} \xrightarrow{T} \frac{x^{*}(t)}{X^{*}(p)} \xrightarrow{W(t)} \frac{y(t)}{Y(p)} \xrightarrow{T} \frac{y^{*}(t)}{Y^{*}(p)}$$

En considérant la transformée de Laplace échantillonnée nous obtenons la relation simple :

 $Y^{*}(p) = H^{*}(p) X^{*}(p)$

Nous avons un **produit algébrique** entre H*(p) et X*(p) pour obtenir Y*(p).

Cherchons à connaître y(nT) la sortie aux seuls instants d'échantillonnage :

Soit h(t) la réponse impulsionnelle de la transmittance H(p).

Par application du principe de superposition au système linéaire de H(p), on peut obtenir la réponse y(t) par sommation des réponses du système à chaque impulsion d'échantillonnage :

 $\begin{array}{ll} \text{Pour } 0 \leq t < T & s(t) = x(o) \ h(t) \\ \text{Pour } T \leq t < 2T & s(t) = x(o) \ h(t) + x(T) \ h(t\text{-}T) \\ \text{Pour } 2T \leq t < 3T & s(t) = x(o) \ h(t) + x(T) \ h(t\text{-}T) + x(2T) \ h(t\text{-}2T) \\ \text{Pour } 3T \leq t < 4T & s(t) = x(o) \ h(t) + x(T) \ h(t\text{-}T) + x(2T) \ h(t\text{-}2T) + x(3T) \ h(t\text{-}3T) \\ \text{Etc...} \end{array}$

Aux seuls instants d'échantillonnage, on obtient :

 $S^{*}(p) = X^{*}(p).H^{*}(p) \leftrightarrow s(nT) = \sum_{m=0}^{n} x(mT) h((n-m)T)$ Produit de convolution discret.

Ce produit de convolution discret est à rapprocher du produit de convolution continu : $S(p) = X(p).H(p) \leftrightarrow y(t) = \int_{0}^{t} x(\sigma) h(t - \sigma) d\sigma \text{ où } t \text{ est équivalent à nT et } \sigma \text{ à mT.}$

2-4- Cas de plusieurs transmittances :

a- Transmittances en cascade :

$$\frac{x(t)}{X(p)} \xrightarrow{T} \underbrace{x^*(t)}_{Y^*(p)} \underbrace{H_1(p)}_{Y_1(p)} \underbrace{y_1(t)}_{Y_1(p)} \underbrace{H_2(p)}_{Y(p)} \underbrace{y(t)}_{Y(p)} \xrightarrow{T} \underbrace{y^*(t)}_{Y^*(p)} \underbrace{y^*(t)}_{Y^*(p)} \underbrace{y^*(t)}_{Y^*(p)} \underbrace{y(t)}_{Y^*(p)} \underbrace{y($$

Donc :

$$Y^{*}(p) = [H_{1}(p) H_{2}(p)]^{*} X^{*}(p)$$

b- Transmittances en cascade séparées par un échantillonneur :

$$\frac{x(t)}{X(p)} \xrightarrow{T} \begin{array}{c} x^*(t) \\ \hline \\ x^*(p) \end{array} \xrightarrow{(t)} \begin{array}{c} y_1(t) \\ \hline \\ y_1(t) \\ \hline$$

Donc :

$$Y^{*}(p) = H_{1}(p)^{*} H_{2}(p)^{*} X^{*}(p)$$

c- Application aux systèmes à retour :

Donc :

$$\frac{Y^{*}(p)}{X^{*}(p)} = \frac{H_{1}^{*}(p) H_{2}^{*}(p)}{1 + T_{o}^{*}(p)} \text{ avec } T_{o}^{*}(p) = H_{1}^{*}(p) \left[H_{2}(p) G(p)\right]^{*}$$

3- Transformées en z :

3-1- <u>Définition :</u>

Nous avons défini la fonction échantillonnée f*(t) à partir de la transformée de Laplace :

$$F^{*}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-npT}$$

En posant le changement de variable $z = e^{pT}$, nous obtenons la transformée en z :

$$f(t) \xrightarrow{Z} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt) z^{-n}$$

 z^{-1} est l'opérateur de décalage (e^{-pT}) d'une période d'échantillonnage (analogue à p⁻¹ opérateur d'intégration pour les systèmes continus).

3-2- Propriétés :

- \rightarrow Si f(t) possède une transformée de Laplace F(p) alors f(t) possède une transformée en z notée F(z).
- → Toutes les fonctions fi(t) qui ont les mêmes valeurs aux instants d'échantillonnage ont la même transformée en z.

3-3- Exemples :

a- *transformée en z de l'échelon unitaire :*

$$Z(U(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} U(nT) z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots$$
 Suite géométrique de raison z^{-1} .

Donc :

 $Z(U(t)) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

D'où
$$H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{1}{1 + \tau p} = (1 - e^{-pT}) \left(\frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau})} \right)$$

Remarque :

$$Z((1 - e^{-pT})F(p)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-pT})f(nT) z^{-n} = (1 - z^{-1})\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) z^{-n}$$
$$Z((1 - e^{-pT})F(p)) = (1 - z^{-1})F(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{T(z)} = \frac{(1 - e^{\frac{-T}{\tau}})z^{-1}}{T(z)}$$

D'où l'équation récurrente :

X(z)

 $-\frac{1-e^{\frac{-T}{\tau}}z^{-1}}{1-e^{\frac{-T}{\tau}}z^{-1}}$

$$Y(n) = (1 - e^{-T/\tau}) X(n-1) + e^{-T/\tau} Y(n-1)$$

3-4- Transformée en z modifiée :

La transformée en modifiée permet la connaissance de f(t) entre deux instants d'échantillonnage avec la définition suivante :

$$F(z,m) = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} f((n+m)T) z^{-n}$$
 avec $0 < m < 1$

Remarque :

 $F(z) = \lim_{m \to 0} z F(z,m)$ et $F(z) = \lim_{m \to 1} F(z,m) + f(0)$

3-5- <u>Régime définitif :</u> (si le système est stable)

Valeur initiale	Valeur finale
$f(0) = \lim_{n \to 0} f(nT) = \lim_{z \to \infty} F(z)$	$f(\infty) = \lim_{n \to \infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$
	$= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$
$f(0) = \lim_{\substack{n \to 0 \\ m \to 0}} f((n+m)T) = \lim_{\substack{z \to \infty \\ m \to 0}} F(z,m)$	$f(\infty) = \lim_{n \to \infty} f((n+m)T) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z,m)$ $= \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) F(z,m)$

4- <u>Stabilité :</u>

 $\label{eq:response} \begin{array}{c} \underline{Rappel:}\\ \hline Rappel: \\ dans le plan de Laplace (en p), la condition absolue pour les systèmes asservis \\ linéaires est Re(p_i) < 0 où les p_i sont les racines du polynôme caractéristique ; ce \\ qui correspond au demi-plan complexe de gauche. \end{array}$

Dans le plan en z, la condition absolue est donc que les racines du polynôme caractéristique en z soient situées à l'intérieur du cercle unité.

$$\operatorname{Re}(\mathbf{p}_{i}) < 0 \xrightarrow{\mathbf{z}_{i} = e^{\mathrm{T}\mathbf{p}_{i}}} |\mathbf{z}_{i}| < 1$$

Exemples :

Racine réelle :

L'application de ce critère n'étant pas simple, on utilise alors une transformation homographique (transformée en w) ; ceci fait correspondre à l'intérieur du cercle unité dans le plan en z, le demi-plan gauche du plan en w :

$w = \frac{z - 1}{z + 1}$	ou	$z = \frac{1 + w}{1 - w}$
---------------------------	----	---------------------------

<u>işnı</u>

5- Spectre d'un signal échantillonné :

Soit *x*(*t*) un signal continu échantillonné à la cadence *T*, on a :

$$x^{*}(t) = x(t)\Delta_{T}$$
, avec $\Delta_{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

On dit que *T* est la période d'échantillonnage. Le spectre complexe de ce signal est donné par la transformée de Fourier de $x^*(t)$, ce qui s'écrit

$$X^*(j\omega) = F\left[x^*(t)\right]$$

rappelons que la transformée de Fourier d'un signal x(t) est définie par :

$$X^{*}(j\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

on a donc :

$$X^{*}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right)e^{-j\omega t}dt$$

or le signal Δ_T est un signal périodique, de période *T*, on peut donc le décomposer en série de Fourier. La décomposition en série de Fourier du signal Δ_T , de période *T*, conduit alors à :

$$\Delta_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_e t} \text{, avec } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_e t} dt$$

où ω_e représente la pulsation du signal Δ_T , c'est-à-dire $\omega_e = 2\pi/T$, on dit que $\omega_e = 2\pi/T$ est la pulsation d'échantillonnage. Dans le cas de ce signal, on vérifie aisément que $C_n=1/T$, d'où :

$$\Delta_T = \frac{1}{T} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} e^{j n \omega_e t}$$

en reportant dans l'expression de $X^*(j\omega)$, il vient :

$$X^{*}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_{e}t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - n\omega_{e})t} dt$$

soit finalement :

$$X^{*}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[j(\omega - n\omega_{e})]$$

On constate qu'il y a périodisation du spectre, le spectre du signal initial est répliqué avec une « période fréquentiel » égale à la pulsation d'échantillonnage ω_e .

5-1- Interprétation graphique :

Soit $X(j\omega)$, le spectre du signal avant échantillonnage. Supposons que le spectre d'amplitude soit tel que celui présenté à la figure ci-dessous.

Deux cas sont alors a distinguer : le cas où $\omega_e/2 > \omega_{max}$ et le cas où $\omega_e/2 < \omega_{max}$.

Cas où $\omega_e/2 > \omega_{max}$ |X(jw)| avant échantillonnage ω $-\omega_{max}$ $\omega_{\rm max}$ $|X^*(j\omega)|$ après échantillonnage ω ω_{r} $-3\omega_e$ $-\dot{\omega}_e$ $-\omega_e/2$ $\dot{\omega_e}/2$ $-2\omega_{e}$ $3\omega_e/2$ Ø. ω_{e}

Le spectre initial $|X(j\omega)|$ n'est pas modifié dans l'intervalle $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$; donc un filtre avec une pulsation de coupure ω_f tel que $\omega_{max} < \omega_f < \omega_e/2$ permet de récupérer le spectre utile et ainsi de reconstituer le signal avant échantillonnage.

• Cas où $\omega_e / 2 < \omega_{max}$

Il y a chevauchement des spectres voisins ; dans l'intervalle $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$ le spectre initial est dénaturé. Il n'est pas possible dans ce cas, de restituer le signal initial.

Théorème de Shannon :

Pour reconstituer complètement le signal après échantillonnage à cadence $T = 2\pi/\omega_e$, il faut que la plus grande pulsation contenu dans le spectre du signal avant échantillonnage soit telle que $\omega_{max} < \omega_e/2$ L'utilisation d'un filtre idéal, après échantillonnage, permet de restituer le signal avant échantillonnage. Pour cela, la pulsation de coupure ω_f du filtre doit être telle que : $\omega_{max} < \omega_f < \omega_e$

5-2- <u>Reconstitution du signal (i.e. filtrage après échantillonnage) :</u>

Il est en général nécessaire de transformer la suite des échantillons en signaux continus compatibles avec les actionneurs utilisés. Cette opération qui n'est autre que la reconstitution du signal du signal continu à partir de ses échantillons, est réalisée naturellement à l'aide du bloqueur et du système qui possède toujours les propriétés d'un filtre passe bas.

$$U(n) \xrightarrow{U(t)} Système y(t)$$

Analysons le filtrage réalisé par le bloqueur :
$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

$$B_{0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{1 - \cos(\omega T) + j.\sin(\omega T)}{j\omega} = \frac{1}{\omega} (\sin(\omega T) - j.(1 - \cos(\omega T)))$$

Rmq: $\sin(\omega T) = 2\sin(\omega T/2)\cos(\omega T/2)$ et $1 - \cos(\omega T) = 2\sin^{2}(\omega T/2)$

D'où :

$$B_0(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_2) \left[\cos(\omega T_2) - j \sin(\omega T_2) \right]$$

Alors :

$$B_{0}(j\omega) = T \frac{\sin\left(\omega T_{2}\right)e^{-j\omega T_{2}}}{\omega T_{2}}$$

Traçons dans le plan de Bode $B_0(j\omega)$:

Module:
$$|B_0(j\omega)| = T \frac{|\sin(\omega T_2)|}{\omega T_2}$$

Argument : $\angle B_0(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} \approx$ au déphasage d'un retard pur de valeur T/2

Ce déphasage a une influence considérable sur la stabilité (voir méthode retard pur équivalent).

5-3- Choix de la période d'échantillonnage :

Le filtrage réalisé par le bloqueur et le système continu, n'est pas un filtrage idéal aussi en résulte-t-il une erreur dite d'échantillonnage. Cette erreur est définie comme le rapport de la valeur quadratique moyenne de l'erreur apparaissant sur le signal restitué à la valeur quadratique de celui-ci.

On peut caractériser la réponse en fréquence d'un système par sa pulsation de coupure et la rapidité de décroissance de la courbe de gain m (db/dec). L'abaque ci-dessous, permet de déterminer, en fonction de m et de α_0 , la pulsation d'échantillonnage qui conduit une certaine erreur d'échantillonnage.

Par exemple, pour un système du deuxième ordre (m=40) de fréquence de coupure 10 Hz, un échantillonnage à 100 Hz conduit à une erreur d'échantillonnage de 5%. Si l'on tolère une erreur de 1%, il faut adopter une cadence d'échantillonnage de 300 Hz. Notons que dans le cas idéal ($m=\infty$, pente verticale) on trouve $\omega_e=2\omega_0$ ce qui correspond au théorème de Shanon.

5-4- Filtrage avant échantillonnage (filtrage de la mesure) :

Il y a nécessité de filtrer le signal de mesure avant échantillonnage. En effet, le signal issu du capteur peut avoir une largeur de bande supérieure à $\omega_e/2$ (ceci notamment en raison du bruit de mesure) et ainsi entraîner, après échantillonnage un recouvrement des spectres. Pour éviter ce phénomène, il convient de filtrer le signal avant échantillonnage à l'aide d'un filtre passe bas dont la pulsation de coupure est de l'ordre de la bande passante maximale souhaitée pour le système bouclé. Notons que ce filtre est nécessairement analogique. La figure suivante présente la structure générale d'un système asservi numérique.

Chapitre 3

Représentation d'état

1- Notion d'état :

Considérons par exemple la commande par l'induit d'un moteur à courant continu et supposons qu'il fonctionne en régime non saturé.

Figure 1. - Moteur à courant continu à commande par l'induit

On a les relations bien connues suivantes :

- équation de la partie électrique :
$$u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$
 (1)

- équation de la partie mécanique :
$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) = C_m(t)$$
 (2)

- équations de couplage électromécaniques : $\begin{cases} e(t) = k_e \omega(t) \\ C_m(t) = k_c i(t) \end{cases}$ (3)

En éliminant le courant entre ces différentes relations, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{Lf + RJ}{LJ}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{Rf + k_ek_e}{LJ}\omega(t) = \frac{k_e}{LJ}u(t) (4)$$

en posant $a_1 = \frac{Lf + RJ}{LJ}$, $a_0 = \frac{Rf + k_ek_e}{LJ}$ et $b_0 = \frac{k_e}{LJ}$, on a :
$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + a_1\frac{d\omega(t)}{dt} + a_0\omega(t) = b_0u(t)$$
(5)

Cette équation étant du deuxième ordre, la connaissance de deux conditions initiales à l'instant initial t_0 est nécessaire et suffisante pour que sa solution soit unique : $\omega(t_0) = \omega_0$ et $\dot{\omega}(t_0) = \dot{\omega}_0$. D'une manière générale, la modélisation d'un système linéaire continu, conduit à une équation différentielle d'ordre *n* :

$$\frac{d^{n}y(t)}{dt^{n}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{1}\frac{dy(t)}{dt} + a_{0}y(t) = b_{m}\frac{d^{m}u(t)}{dt^{m}} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{1}\frac{du(t)}{dt} + b_{0}u(t) \quad (6)$$

La résolution de cette équation différentielle d'ordre n ($m \le n$) nécessite donc la connaissance de n conditions initiales pour assurer l'unicité de la solution.

Une représentation telle que (6) est dite externe car elle ne fait apparaître que la variable d'entrée u et la variable de sortie y du système. Cette représentation n'est pas la seule possible, il est en effet bien connu qu'une équation différentielle de degré n, peut être transformée, moyennant l'introduction de n variables indépendantes, en un système de n équations différentielles du 1^{er} ordre. Les variables introduites pour réaliser cette transformation sont appelées les variables d'état du système. Pour le montrer, reprenons l'équation différentielle (5), celle-ci peut s'écrire :

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{d\omega(t)}{dt} - a_0 \omega(t) + b_0 u(t)$$
(7)

Cette dernière relation peut être représentée graphiquement à l'aide du graphe de fluence suivant :

Figure 2. - Graphe de fluence associé à l'équation (7)

Compte tenu des variables x_1 et x_2 associées aux sorties des intégrateurs p^{-1} , on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1}(t) = x_{2}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) = -a_{0}x_{1}(t) - a_{1}x_{2}(t) + b_{0}u(t) \\ \omega(t) = x_{1}(t) \end{cases}$$
(8)

que l'on peut encore écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \omega(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$
(9)

Les variables x_1 et x_2 sont les variables d'état du système, les équations (9) sont respectivement, l'équation d'état et l'équation de sortie. Une telle représentation est dite interne car en plus des variables d'entrée et de sortie, elle fait apparaître les grandeurs d'état du système.

(10)

2- Définition de l'état d'un système :

D'une manière générale, le comportement dynamique d'un système linéaire d'ordre n multivariable à m entrées et r sorties peut être décrit sous la forme matricielle suivante :

 $\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) & \text{équation d'état} \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) & \text{équation de sortie} \end{cases}$

<u>x</u> est le vecteur d'état de dimension n, <u>x</u> = $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ <u>u</u> est le vecteur de commande de dimension m, <u>u</u> = $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix}^T$ <u>y</u> est le vecteur de sortie de dimension r, <u>y</u> = $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{bmatrix}^T$ <u>A</u> est la matrice d'évolution de dimension (n,n)

B est la matrice d'entrée de dimension (*n*,*m*)

C est la matrice de sortie de dimension (r,n)

D est la matrice d'application directe de la commande de dimension (r,m), cette matrice est généralement nulle.

L'état d'un système de degré *n*, à un instant t_0 quelconque, est l'ensemble des *n* variables $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ..., $x_n(t_0)$ qui lorsqu'on connaît le vecteur de commande $\underline{u}(t)$ pour $t \ge t_0$, est suffisant pour déterminer le comportement du système pour $t \ge t_0$. Les $x_i(t)$ (*i*=1 à *n*) sont les variables d'état du système.

Le nombre de variables d'état d'un système est égal au nombre d'intégrateurs du graphe de fluence, c'est aussi le degré du système ou encore le nombre de conditions initiales nécessaires pour assurer l'unicité de la solution du système différentiel.

3- Non unicité de la représentation d'état :

Si $\underline{x}(t)$ est le vecteur d'état d'un système donné, alors tout vecteur $\underline{z}(t)$ tel que $\underline{x}(t) = T \underline{z}(t)$, avec T inversible, est aussi un vecteur d'état du système. Ceci revient à réaliser un changement de base, T est la matrice de passage.

Afin d'obtenir la représentation d'état dans la nouvelle base, réalisons dans (10) le changement de variable x(t) = Tz(t), on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} \underline{\dot{z}}(t) = \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} \underline{z}(t) + \boldsymbol{B} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \boldsymbol{C} \boldsymbol{T} \underline{z}(t) + \boldsymbol{D} \underline{u}(t) \end{cases} \xrightarrow{} \begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} \underline{z}(t) + \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{B} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \boldsymbol{C} \boldsymbol{T} \underline{z}(t) + \boldsymbol{D} \underline{u}(t) \end{cases}$$
(11)

 $A'=T^{1}AT$ est la matrice d'évolution dans la nouvelle base $B'=T^{1}B$ est la matrice d'entrée dans la nouvelle base C'=CT est la matrice de sortie dans la nouvelle base

Comme il existe une infinité de matrices T possibles, il existe une infinité de vecteurs d'état et donc de représentations d'état.

Il peut être intéressant de réaliser un changement de base dans le but de mettre en évidence certaines propriétés du système ou pour simplifier les calculs.

La représentation par matrice de transfert d'un système, est une description externe, de la forme générale suivante :

$$\underline{Y}(p) = \boldsymbol{H}(p)\underline{U}(p) \tag{12}$$

où $\underline{Y}(p)$ représente la transformée de Laplace du vecteur de sortie, de dimension r, $\underline{U}(p)$ est la transformée de Laplace du vecteur d'entrée, de dimension m et H(p) la matrice de transfert du système, de dimension (r,m). A titre d'exemple, considérons schéma fonctionnel de la figure 3.

Figure 3.- Exemple de système multivariable à deux entrées et trois sorties.

La représentation par matrice de transfert du système de la figure 3 est alors la suivante :

$$\begin{bmatrix} Y_{1}(p) \\ Y_{2}(p) \\ Y_{3}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{1+p} & \frac{5}{1+2p} \\ \frac{5}{1+2p} & -\frac{5}{1+2p} \\ \frac{10}{1+p} & \frac{p+2}{1+5p} + \frac{5}{1+2p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1}(p) \\ U_{2}(p) \end{bmatrix} \\ \underbrace{U_{2}(p)}_{\underline{U}(p)} \end{bmatrix}$$
(13)

De même que la fonction de transfert d'un système s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles, la matrice de transfert s'obtient en prenant la transformée de Laplace de la représentation d'état pour des conditions initiales nulles. En prenant la transformée de Laplace de la représentation d'état (10), on obtient :

$$\begin{cases} p\underline{X}(p) = A\underline{X}(p) + B\underline{U}(p) \\ \underline{Y}(p) = C\underline{X}(p) + D\underline{U}(p) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{X}(p) = (pI - A)^{-1}B\underline{U}(p) \\ \underline{Y}(p) = C\underline{X}(p) + D\underline{U}(p) \end{cases}$$
(14)

d'où :

$$\underline{Y}(p) = \left(C(pI - A)^{-1} B + D \right) \underline{U}(p)$$
(15)

La matrice de transfert du système s'écrit donc :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{C} (\boldsymbol{p} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$
(16)

4-1- Unicité de la représentation par matrice de transfert :

Soit la représentation d'état :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$
(17)

la matrice de transfert s'écrit alors :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{C} (\boldsymbol{p} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$
(18)

Réalisons le changement de base tel que x(t) = Tz(t), la représentation d'état du système devient dans la nouvelle base :

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}A\mathbf{T}\underline{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\mathbf{T}\underline{z}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \end{cases}$$
(19)

la matrice de transfert s'écrit alors dans la nouvelle base :

$$\boldsymbol{H'}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{p}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$
(20)

or , sachant que $(A_1A_2...A_n)^{-1} = A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}$, on a aussi

$$(pI - T^{-1}AT)^{-1} = [T^{-1}(pTT^{-1} - A)T]^{-1} = [T^{-1}(pI - A)T]^{-1} = T^{-1}(pI - A)^{-1}T$$
(21)

en reportant dans l'expression de H'(p), on obtient :

$$H'(p) = CTT^{-1}(pI - A)^{-1}TT^{-1}B + D = C(pI - A)^{-1}B + D = H(p)$$
(22)

Ce qui montre bien que la matrice de transfert est unique.

4.2. Valeurs propres de la matrice d'état, pôles et zéros de la matrice de transfert :

Les valeurs propres de la matrice d'évolution A de dimension (n,n) sont les n racines λ_i de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{23}$$

Toutes les représentations d'état relatives à un même système ont les mêmes valeurs propres. Comme nous l'avons vu, si T est la matrice de changement de base, alors la matrice d'évolution dans la nouvelle base s'écrit $A' = T^{-1}AT$. Les valeurs propres sont alors données par :

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = \det(T^{-1})\det(\lambda I - A)\det(T)$$
(24)

car det (M_1M_2) = det (M_1) det (M_2) , on peut donc encore écrire :

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(\lambda I - A)\det(T) = \det(\lambda I - A)\det(T^{-1}T) = \det(\lambda I - A) \det(T^{-1}T) = \det(\lambda I - A)$$
(25)

ce qui montre bien que les valeurs propres de la matrice d'évolution sont invariantes par changement de base.

La matrice de transfert d'un système $H(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$ peut encore s'écrire :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}) = \underbrace{\frac{1}{\det(\boldsymbol{p}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}}_{P\hat{o}les \ du \ système}} \cdot \underbrace{\left[\boldsymbol{C} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \cdot \det(\boldsymbol{p}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\right]}_{Z\acute{e}ros \ du \ système}$$
(26)

On en déduit donc que les valeurs propres de la matrice d'évolution A du système sont les pôles de la matrice de transfert H(p), det(pI - A) est le polynôme caractéristique du système dont les n racines p_i sont les pôles de la matrice de transfert :

$$\rho(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} (p - p_i)$$
(27)

5- Obtention d'une représentation d'état à partir de la fonction de transfert :

Soit H(p) la fonction de transfert d'un système, on a :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = C(pI - A)^{-1}B + D$$
(28)

Etant donné la multiplicité des représentations d'état possibles et l'unicité de la fonction de transfert, il existe plusieurs façons de passer de la fonction de transfert à la représentation d'état. Nous en verrons trois conduisant à des formes canoniques remarquables :

- forme canonique commandable ou gouvernable
- forme canonique observable
- forme canonique modale.

5-1- Forme canonique commandable :

Soit la fonction de transfert d'un système d'entrée U(p) et de sortie Y(p) :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$
(29)

cette fonction de transfert peut encore s'écrire, en introduisant une variable intermédiaire V(p), sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Y(p)}{V(p)} \cdot \frac{V(p)}{U(p)} \text{ avec } \begin{cases} \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} \\ \frac{Y(p)}{V(p)} = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0 \end{cases}$$
(30)

on a donc :
$$\begin{cases} p^{n}V = U - a_{n-1}p^{n-1}V - \dots - a_{1}pV + a_{0}V \\ Y = b_{m}p^{m}V + b_{m-1}p^{m-1}V + \dots + b_{1}pV + b_{0}V \end{cases}$$
(31)

d'où le graphe de fluence suivant :

Figure 4. - Graphe de fluence associé à (31)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_{n}(t) \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
(32)

5-2- Forme canonique observable :

Soit la fonction de transfert d'un système d'entrée U(p) et de sortie Y(p) :

$$H(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$
(33)

cette fonction de transfert peut encore s'écrire à l'aide des puissances négatives de p :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_{n-1}p^{-1} + b_{n-2}p^{-2} + \dots + b_1p^{-n+1} + b_0p^{-n}}{1 + a_{n-1}p^{-1} + \dots + a_1p^{-n+1} + a_0p^{-n}}$$
(34)

on a donc :

$$Y = (b_{n-1}U - a_{n-1}Y)p^{-1} + \dots + (b_1U - a_1Y)p^{-n+1} + (b_0U - a_0Y)p^{-n}$$
(35)

d'où le graphe de fluence suivant :

Figure 5. - Graphe de fluence associé à (35)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{1} & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{x}(t) \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_{n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{1} \\ b_{0} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
(36)

5-3- Forme canonique modale :

Soit la fonction de transfert d'un système d'entrée U(p) et de sortie Y(p) :

$$H(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$
(37)

Si les p_i (*i*=1 à *n*) sont les *n* pôles distincts de H(p), alors cette fonction de transfert peut encore s'écrire en réalisant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p - p_i} \quad \text{avec} \quad A_i = \left[(p - p_i) H(p) \right]_{p = p_i}$$
(38)

on a lors le graphe de fluence suivant :

Figure 6. - Graphe de fluence associé à (38)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \\ \vdots \\ x_{n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1} \\ A_{2} \\ \vdots \\ A_{n} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$(39)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t)$$

On obtient une représentation d'état avec *A* diagonale. Les éléments de la diagonale sont les pôles du système.

7- Solution de l'équation d'état :

7-1- Cas d'une seule variable d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
(40)

a-Résolution de l'équation homogène (sans second membre) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{x} = a \cdot dt \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t a \cdot d\tau \rightarrow \ln(x(t)) - \ln(x(t_0)) = a(t - t_0) \tag{41}$$

d'où la solution de l'équation homogène :

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0)$$
(42)

La fonction $e^{a(t-t_0)}$ est appelée fonction de transition.

b-Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante :

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}k(t) \to \dot{x}(t) = ae^{a(t-t_0)}k(t) + e^{a(t-t_0)}\dot{k}(t)$$
(43)

en reportant dans l'équation différentielle (41) il vient :

$$ae^{a(t-t_0)}k(t) + e^{a(t-t_0)}\dot{k}(t) - ae^{a(t-t_0)}k(t) = bu(t) \to \dot{k}(t) = e^{-a(t-t_0)}bu(t)$$
(44)

d'où en intégrant :

$$\int_{t_0}^{t} \dot{k}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau - t_0)} bu(\tau) d\tau = k(t) - x(t_0) \to k(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau - t_0)} bu(\tau) d\tau$$
(45)

d'où la solution de l'équation complète ($t \ge t_0$) :

$$x(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)}x(t_0)}_{Régime \ libre} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{Régime \ forcé}$$
(46)

7-2- Cas multivariable :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$
(57)

a- Matrice de transition :

On procède comme pour un système du premier ordre en généralisant la fonction de transition. On appelle matrice de transition la matrice $e^{A(t-t_0)}$ définie par le développement en série de Taylor :

$$e^{A(t-t_0)} = \mathbf{I} + A(t-t_0) + \frac{A^2}{2!}(t-t_0) + \dots + \frac{A^k}{k!}(t-t_0)^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}(t-t_0)^k$$
(48)

on vérifie facilement que :

$$e^{A(t_0-t_0)} = I$$
 et $\frac{d}{dt} \left(e^{A(t-t_0)} \right) = A e^{A(t-t_0)}$ (49)

b-Solution de l'équation homogène :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$
(50)

D'après (52), la matrice de transition est solution de l'équation homogène soit :

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0)$$
(51)

c-Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante :

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{k}(t) \to \underline{\dot{x}}(t) = Ae^{A(t-t_0)}\underline{k}(t) + e^{A(t-t_0)}\underline{\dot{k}}(t)$$
(52)

en reportant dans l'équation différentielle (40) il vient :

$$Ae^{a(t-t_0)}\underline{k}(t) + e^{A(t-t_0)}\underline{\dot{k}}(t) - Ae^{a(t-t_0)}\underline{k}(t) = \underline{B}\underline{u}(t) \rightarrow \underline{\dot{k}}(t) = e^{-A(t-t_0)}\underline{B}\underline{u}(t)$$
(53)

d'où en intégrant :

$$\int_{t_0}^{t} \underline{\dot{k}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau - t_0)} \boldsymbol{B} \underline{u}(\tau) d\tau = \underline{k}(t) - \underline{x}(t_0) \to \underline{k}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau - t_0)} \boldsymbol{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$
(54)

d'où la solution de l'équation complète ($t \ge t_0$) :

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{Régime \ libre} \underline{x}(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau}_{Régime \ forcé}$$
(55)

Le régime libre représente la réponse à la condition initiale $\underline{x}(t_0)$ avec l'entrée $\underline{u}(t)$ nulle. Le régime forcé par $\underline{u}(t)$ qu'on suppose nulle pour $t < t_0$ représente la réponse à l'entrée $\underline{u}(t)$ avec la condition initiale $\underline{x}(t_0)$ nulle.

7-3- Propriétées de la matrice de transition :

$$e^0 = I \tag{56}$$

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau} \tag{57}$$

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \text{ si et seulement si } AB = BA$$
(58)

si
$$A = \operatorname{diag}(\lambda_i) \operatorname{alors} : e^{At} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_i t})$$
 (59)

$$\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At} \tag{60}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At} = e^{At}A \text{ car les matrices } e^{At} \text{ et } A \text{ commutent}$$
(61)

$$L[e^{At}] = (pI - A)^{-1} \text{ et donc aussi} : e^{At} = L^{-1}[(pI - A)^{-1}]$$
(62)

6- Stabilité, gouvernabilité et observabilité d'un système :

On considère dans cette partie le cas des systèmes continus linéaires et invariants :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$
(63)

6-1- Stabilité d'un système linéaire invariant :

L'étude de la stabilité ne diffère pas de la méthode classique où elle se fait par l'examen des parties réelles des racines du polynôme caractéristique.

On a vu que l'évolution d'un système abandonné à lui-même (évolution libre) est décrite par l'équation $x(t) = e^{At}x(0)$ qui représente l'évolution des variables d'état en fonction des différentes conditions initiales. Le système est asymptotiquement stable si $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}x(0) = 0$. Ceci n'est possible que si toutes les valeurs propres de *A* sont à partie réelle négative. Une matrice dont les valeurs propres sont toutes à partie réelle négative est dite matrice de Hurwitz.

6-2- Gouvernabilité :

Un système linéaire invariant est dit gouvernable (commandable) si sont état peut être transféré d'un état initial quelconque à un état final quelconque en temps fini sous l'effet d'un vecteur de commande. On montre qu'un système tel que (63) est gouvernable si :

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{Go}) = n \quad \operatorname{avec} \quad \boldsymbol{Go} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1} \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$
(64)

Cela signifie que les commandes « affectent » toutes les variables d'état.

6-3- Observabilité :

Un système linéaire invariant est dit observable s'il existe un instant $t_1 \ge t_0$ tel que la connaissance de l'entrée et de la sortie sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$, soit suffisante pour déterminer l'état initial $\underline{x}(t_0)$. On montre qu'un système tel que (63) est observable si :

rang(**Ob**) = n avec
$$\mathbf{Ob} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$
 (65)

Cela signifie que les sorties sont « affectées » par toutes les variables d'état.

8- Représentation en temps discret des systèmes à temps continu :

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) \tag{66}$$

le problème de la discrétisation d'une équation différentielle telle que (66) consiste à calculer x(t) à des instants t multiples d'un pas de temps élémentaire T dit pas de la discrétisation.

8-1- Discrétisation approchée :

L'équation (66) peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$dx(t) = f(t)dt \tag{67}$$

Le problème consiste donc à intégrer l'équation (67) entre deux instants successifs multiples du pas de la discrétisation, il s'agit donc de calculer :

$$\int_{x(nT)}^{x[(n+1)T]} dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt$$
(68)

où *n* est un nombre entier, on a donc :

$$x[(n+1)T] = x(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt$$
(69)

Les différentes approximations résultent de la finesse avec laquelle est calculée l'intégrale présente dans la relation (69).

8-1-1- Méthode du rectangle inférieur :

Figure 7. - Approximation par la méthode du rectangle inférieur.

La discrétisation par la méthode du rectangle inférieur consiste à approcher l'air sous la courbe de f(t) entre deux instants successifs nT et (n+1)T par le rectangle inférieur Tf(nT):

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt = Tf(nT)$$
(70)

La relation (69) s'écrit donc :

$$x[(n+1)T] = x(nT) + Tf(nT) \to \frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} = f(nT)$$
(71)

cette dernière relation est à rapprocher de (66), on a donc :

$$\frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} \approx \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=nT}$$
(72)

c'est l'approximation bien connue d'Euler.

8-1-2- Méthode du rectangle supérieur :

Figure 8. - Approximation par la méthode du rectangle supérieur.

La discrétisation par la méthode du rectangle supérieur consiste à approcher l'air sous la courbe de f(t) entre deux instants successifs nT et (n+1)T par le rectangle supérieur Tf[(n+1)T]:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt = Tf((n+1)T)$$
(73)

La relation (69) s'écrit donc :

$$x[(n+1)T] = x(nT) + Tf[(n+1)T] \to \frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} = f[(n+1)T]$$
(74)

cette dernière relation est à rapprocher de (66), on a donc :

$$\frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} \approx \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=(n+1)T}$$
(75)

8-1-3- Méthode du trapèze :

Figure 9. - Approximation par la méthode du trapèze.

La discrétisation par la méthode du trapèze consiste à approcher l'air sous la courbe de f(t) entre deux instants successifs nT et (n+1)T par l'air du trapèze :

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt = T \frac{f[(n+1)T] + f(nT)}{2}$$
(76)

La relation (69) s'écrit donc :

$$x[(n+1)T] = x(nT) + T \frac{f[(n+1)T] + f(nT)}{2} \to \frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} = \frac{f[(n+1)T] + f(nT)}{2}$$
(77)

cette dernière relation est à rapprocher de (66), on a donc :

$$\frac{x[(n+1)T] - x(nT)}{T} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_{t=(n+1)T} + \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_{t=nT} \right]$$
(78)

On constate que cette dernière approximation réalise la moyenne des deux approximations précédentes.

8-2-Discrétisation approchée de l'équation d'état :

Soit un système linéaire invariant à temps continu :

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$
(79)

connaissant (79), il s'agit de déterminer le système à temps discret correspondant :

$$\begin{cases} \underline{x}[(k+1)T] = F \underline{x}(kT) + G \underline{u}(kT) \\ \underline{y}(kT) = C \underline{x}(kT) + D \underline{u}(kT) \end{cases}$$
(80)

en d'autres termes, il s'agit de déterminer les matrices F et G de la représentation à temps discret en fonction des matrices A et B de la représentation à temps continu. Dans la suite, afin de simplifier les notations, nous écrirons $\underline{x}(k+1)$ pour $\underline{x}[(k+1)T]$ et $\underline{x}(k)$ pour $\underline{x}(kT)$.

8-2-1-Utilisation de l'approximation d'Euler :

D'après (72), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ T \end{cases} = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \longrightarrow \begin{cases} \underline{x}(k+1) = (I + AT)\underline{x}(k) + BT\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \underline{x}(k+1) = (I + AT)\underline{x}(k) + BT\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = C\underline{x}(k) + D\underline{u}(k) \end{cases}$$
(81)

On a donc :
$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T \\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}T \end{cases}$$
(82)

8-2-1- Utilisation de l'approximation du trapèze :

D'après (72), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)}{T} = \frac{1}{2} A[\underline{x}(k+1) + \underline{x}(k)] + \frac{1}{2} B[\underline{u}(k+1) + \underline{u}(k)] \\ y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) \end{cases}$$
(83)

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} \left(I + \frac{AT}{2}\right) \underline{x}(k) + \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} BT \underline{u}(k) \\ y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) \end{cases}$$
(84)

On a donc :
$$\begin{cases} F = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} \left(I + \frac{AT}{2}\right) \\ G = \left(I - \frac{AT}{2}\right)^{-1} BT \end{cases}$$
(85)

8-2-Discrétisation exacte de l'équation d'état :

Nous avons vu que la solution générale de l'équation d'état s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$
(86)

la discrétisation exacte du système continu correspondant consiste à calculer cette solution entre deux instants discrets successifs $t_0=nT$ et t=(n+1)T, on a alors :

$$\underline{x}(n+1) = e^{AT} \underline{x}(n) + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$
(87)

or, $u(\tau)$ est constant entre deux instants successifs nT et (n+1)T, (figure 10)

Figure 10. - $u(\tau)$ est constant entre nT et (n+1)T

L'équation (87) s'écrit donc :

$$\underline{x}(n+1) = e^{AT} \underline{x}(n) + \left[\int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} d\tau \right] \underline{B} \underline{u}(n)$$
(88)

Le calcul de l'intégrale donne :

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} d\tau = -A^{-1} \left[e^{A[(n+1)T-\tau]} \right]_{nT}^{(n+1)T} = -A^{-1} \left(I - e^{AT} \right)$$
(89)

en reportant dans (88) il vient :

$$\underline{x}(n+1) = e^{AT} \underline{x}(n) + A^{-1} \left(e^{AT} - I \right) \underline{B} \underline{u}(n)$$
(90)

on a donc en identifiant avec (80) :
$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = e^{AT} \\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^{-1} (e^{AT} - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{B} \end{cases}$$
(91)